АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ, А. М. РУБИНОВ

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МИНКОВСКОГО И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ответственный редактор В. А. Булавский

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1976

УДК 513.88

Книга посвящена одной из основных конструкций выпуклого анализа — математической дисциплины, сформировавшейся в последние годы в рамках функционального анализа. Теория двойственности Минковского излагается для важного и широкого класса объектов, охватывающего выпуклые и сублинейные функции; выпуклые, нормальные, выпуклые по Фаню и другие множества и т. п. Приводятся разнообразные приложения этой теории. Особое внимание уделено задачам представления положительных функционалов над различными классами выпуклых функций и множеств, проблемам сходимости последовательностей линейных операторов и порождения полуупорядоченных пространств с помощью операции взятия супремума, экстремальным задачам геометрии выпуклых поверхностей и ряду других вопросов.

Книга доступна студентам старших курсов математических факультетов и будет полезна аспирантам и научным работникам, специализирующимся в области выпуклого и функционального анализа, математического программирования и геометрии выпуклых множеств.

$К\frac{20204-725}{055(02)-76}$ БЗ-26-82-75

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы резко возрос интерес к теории выпуклых функций, выпуклых множеств, выпуклых экстремальных задач и к другим вопросам, связанным с выпуклостью. Интерес к этой тематике стимулировался в основном потребностями математического программирования [75].

Исследования в указанных направлениях в настоящее время объединяются под названием «выпуклый анализ». Общей чертой большинства работ по выпуклому анализу является их ярко выраженная прикладная направленность. В то же время, идеи выпуклого анализа находят многочисленные приложения и в традиционных разделах математики — в конструктивной теории функций, теории линейных неравенств, вариационном исчислении и т. д.

С точки зрения методов исследования, общим приемом работ по выпуклому анализу является систематическое использование различного рода идей двойственности.

Аппарат лагранжевой двойственности экстремальных задач изложен, например, в [47]. Схема двойственности выпуклых функций (теория сопряженных функций) изложена в [141]. Однако подробное изложение двойственности Минковского, несмотря на большую наглядность этого понятия и многообразие его внутриматематических приложений, в монографической литературе отсутствует. Настоящая работа представляет попытку восполнить этот пробел.

При этом оказалось целесообразным изложить теорию двойственности Минковского, не закладывая в нее априори никаких теорем отделимости, что приводит к понятию так называемых H-выпуклых функций (т. е. функций, являющихся верхними огибающими функций из некоторого класса H).

Традиционные приложения идей двойственности выпуклого анализа отражены в монографиях [47, 141]. Поэтому здесь излагаются в основном новые результаты и приложения, отражающие круг личных интересов авторов.

В первой главе приводятся две основные модификации двойственности Минковского: так называемые схемы Минковского — Фенхеля и Фенхеля — Моро для H-выпуклых функций. Описываются различные важные для приложений классы H-выпуклых функций и множеств. Таким образом, здесь дается достаточно широкий набор выпуклых объектов.

Во второй главе обсуждаются линейные способы задания классов H-выпуклых функций, т. е. описываются поляры конусов H-выпуклых функций. В этой же главе приводятся элементы теории Шоке для H-выпуклых множеств.

Третья глава посвящена изучению супремальных генераторов полуупорядоченных пространств, т. е. таких конусов H, что каждый элемент пространства является в известном смысле H-выпуклой функцией. Оказывается, что супремальный генератор тесно связан со свойствами сходимости последовательностей операторов и функционалов, со свойствами их распространений. В этой же главе приводится ряд приложений концепции супремального порождения.

Четвертая глава посвящена применению некоторых изложенных конструкций к объекту, собственно и приведшему к возникновению понятия двойственности Минковского, т. е. к экстремальным задачам геометрии выпуклых поверхностей. В этой главе, в частности, приводится способ анализа и решения ряда экстремальных задач изопериметрического типа со многими ограничениями, к которым в принципе не применима техника симметризаций.

Для понимания основного содержания книги формально необходимым является лишь знакомство с основными принципами линейного анализа в объеме соответствующих глав любого современного учебника. Сведения из нетрадиционных для университетской практики курсов, используемые в этой работе, сведены в приложениях. Однако при чтении книги полезно иметь под рукой монографии Б. З. Вулиха «Введение в теорию полуупорядоченных пространств» и Г. Буземана «Выпуклые поверхности». Желательным является также знакомство с теорией выпуклых функций (например, по вышедшей в принстонской серии книге Р. Т. Рокфеллера «Выпуклый анализ») и элементами теории Шоке (например, в объеме небольшой и хорошо написанной книги Р. Фелпса «Лекции о теоремах Шоке»).

Глава III читателем, интересующимся только геометрическими приложениями двойственности Минковского, может быть опущена. Материал главы IV не содержит, вероятно, ничего, относящегося к проблемам сходимости последовательностей операторов.

Запись ($b.\ c$) в зависимости от контекста означает формулу, предложение, пример или теорему, фигурирующую в данной главе с этим индексом. Встретив запись ($a.\ b.\ c$), следует обратиться к главе a и рассматривать символ ($в.\ c$). Именные теоремы не нумеруются и могут быть найдены с помощью предметного указателя. Исторические и литературные указания собраны в основном в конце книги.

Авторы признательны всем товарищам и коллегам, принявшим участие в обсуждении этой книги. Особую благодарность авторы приносят В. А. Булавскому, критические замечания которого способствовали улучшению книги.

ВВЕДЕНИЕ

0°. Предварительные замечания. Выпуклые функции как самостоятельный объект исследования впервые, по-видимому, появились в работе Иенсена [67], хотя неравенства, определяющие выпуклую функцию и называемые сейчас неравенствами Иенсена, рассматривались еще Гельдером [43]. Одно из первых упоминаний выпуклых функций в учебной литературе содержится у Штольца [180].

Практически в то же самое время были обнаружены различные связи между выпуклыми функциями и выпуклыми множествами — объектами, известными задолго до введения понятия выпуклой функции.

Фундаментальным открытием явилось выяснение особой роли однородных выпуклых функций (сублинейных функционалов) — так называемых калибровочных и опорных функций. Честь этого открытия принадлежит Минковскому [125], с успехом применившему указанный класс функций в своих многочисленных исследованиях, отличающихся разнообразием, геометрической наглядностью и широтой. Основные труды Минковского собраны в вышедшем под редакцией Гильберта двухтомнике «Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski», Teubner, Leipzig, 1911.

Важным шагом в развитии взглядов Минковского явилась установленная Фенхелем теорема о восстановлении выпуклого компакта по его опорной функции. Этот результат, называемый теоремой Минковского — Фенхеля, и служит основным аппаратом, позволяющим применять теорию выпуклых функций для исследования выпуклых множеств и, наоборот, использовать геометрические конструкции в ряде вопросов анализа.

Идея двойственности, заключающаяся в совместпом изучении пары объектов (исходного и в некотором смысле двойственного, сопряженного объекта) для понимания свойств каждого из объектов, не нова. Однако свою вторую молодость этот подход нашел в последнее время в рамках выпуклого анализа. Выяснилось, что опорные функции и некоторые их подклассы, построенные, фактически, по той же схеме Минковского — Фенхеля, находят разнообразные применения в различных математических дисциплинах. Одним из основных потребителей этой схемы является теория экстремальных задач, развиваемая математическим программированием. При этом в последней теории отправным пунктом часто являются выпуклые функции (см., например, [141, 69]). Это обстоятельство привело к интенсификации исследований выпуклых функций и, в частности, к созданию теории сопряженных выпуклых функций, получившей название «теория Фенхеля — Моро».

Выяснилось, что в известном смысле классы выпуклых функций и выпуклых множеств (сублинейных функций) неразличимы. В следующих двух пунктах, следуя изящной конструкции Хермандера [167], мы выявим общее свойство этих классов, играющее роль решающего обстоятельства в ряде задач. В третьем пункте мы заметим, что подобным образом можно исследовать и другие очень широкие классы функций. Оказывается, что все непрерывные функции одной переменной «похожи» на выпуклые функции двух переменных. Тем самым некоторые свойства, например, непрерывных функций можно исследовать с помощью методов выпуклого анализа.

Методы, позволяющие однотипно исследовать различные «сопряженные» классы функций и множеств в духе выпуклого анализа, и составляют, собственно, теорию двойственности Минковского.

1°. Выпуклые функции и сублинейные функционалы. Рассмотрим локально выпуклое пространство (л. в. п.). Нас будут интересовать выпуклые замкнутые непустые множества в этом пространстве. Покажем, следуя Хермандеру [167], что изучение этих множеств можно свести к изучению замкнутых конусов.

Прежде всего, условимся в дальнейшем под *конусом* понимать выпуклое множество K, обладающее тем свойством, что $\lambda K \subset K$ при любом $\lambda \in R_+$. Здесь и в дальнейшем символом R_+ обозначается неотрицательная полуось вещественной прямой R. Кроме того, символом $\bar{R}$ будем обозначать расширенную числовую прямую.

Пусть Ω — непустое выпуклое замкнутое множество в л. в. п. V. Поместим Ω в гиперплоскость $V\times\{1\}$ пространства $V\times R$; иными словами, рассмотрим множество $\tilde{\Omega}=\{(x, 1)\in V\times R: x\in\Omega\}$. Натянем затем на $\tilde{\Omega}$ коническую оболочку и замкнем ее. Получившийся конус обозначим через Γ_Ω. В дальнейшем оболочку выпуклого множества ξ обозначим через $\mathrm{Co}(\xi)$. В этих обозначениях $\Gamma_\Omega=\overline{\mathrm{Co}(\tilde{\Omega})}$. Конус Γ_Ω лежит в полупространстве $V\times R_+$, кроме того, он не содержится в гиперплоскости $V\times\{0\}$. Если Γ — произвольный замкнутый конус в пространстве $V\times R$, обладающий указанными свойствами, то имеет смысл рассмотреть множество Ω_Γ в V, определяемое формулой $\Omega_\Gamma=\{x\in V: (x, 1)\in\Gamma\}$. Множество Ω_Γ непусто, выпукло и замкнуто. Оказывается, что конус Γ_{Ω_Γ} совпадает с Γ. В самом деле, заметим, что конус Γ совпадает с замыканием конуса $\Gamma'=\{(x, \lambda)\in\in\Gamma:\lambda>0\}$. Действительно, если $u_1=(x, 0)\in\Gamma$, то $u_1=$ $=\lim\limits_{\alpha\uparrow 1}(\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)$, где $u_2=(y, \mu)$ — произвольная точка из Γ, обладающая тем свойством, что $\mu>0$. Помимо этого, $\Gamma'=\mathrm{Co}(\Omega)$. Таким образом, конусы Γ и Γ_{Ω_Γ} получаются замыканием одного и того же множества Γ' и, следовательно, $\Gamma=\Gamma_{\Omega_\Gamma}$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства V, через $\mathfrak{B}_c$ — совокупность всех замкнутых конусов в пространстве $V\times R$, лежащих в полупространстве $V\times R_+$ и не содержащихся в гиперплоскости $V\times\{0\}$. Мы показали в этих обозначениях, что справедливо следующее

Предложение 1.1. *Отображение $\Omega\to\Gamma_\Omega$ множества $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_c$ биективно.*

Рассмотрим совокупность $\bar{R}^V$ всех функций, определенных на некотором топологическом пространстве V и принимающих значения из расширенной числовой прямой $\bar{R}$. Нам понадобятся следующие два определения. Если $f\in\bar{R}^V$, то *эффективным множеством* этой функции называется множество

$$\mathrm{dom}\, f=\{x\in V: f(x)<+\infty\}.$$

Надграфиком функции f из $\tilde{R}^V$ называется множество

$$\operatorname{epi} f = \{(x, \lambda) \in V \times R : \lambda \geqslant f(x)\}.$$

Первая проекция $\operatorname{epi} f$ совпадает с $\operatorname{dom} f$. Иными словами, $\operatorname{epi} f = \{(x, \lambda) \in V \times R : x \in \operatorname{dom} f, \quad \lambda \geqslant f(x)\}$. Выясним свойства множества $\operatorname{epi} f$, предполагая, что $f \in \tilde{R}^V$, $f \neq +\infty$ (здесь и ниже приняты обозначения $+\infty : v \to +\infty$, $-\infty : v \to -\infty$). Прежде всего отметим, что это множество с каждой своей точкой (x, λ) содержит и весь луч $\{(x, \mu)\}_{\mu \geqslant \lambda}$. Множество в пространстве $V \times R$, обладающее указанным свойством, будем называть *R_+-устойчивым.* Таким образом, $\operatorname{epi} f$ — R_+-устойчивое множество. Кроме того, $\operatorname{epi} f$ обладает тем свойством, что его пересечение с каждой прямой $(x, R) = \{(x, \mu)\}_{\mu \in R}$, где $x \in V$, замкнуто.

Если $f = +\infty$, то $\operatorname{epi} f = \varnothing$. Отметим, что пустое множество R_+-устойчиво. Кроме того, это множество обладает и вторым свойством надграфика. Нетрудно проверить, что каждое R_+-устойчивое множество ξ, лежащее в $V \times R$ и такое, что его пересечение с любой прямой (x, R), где $x \in V$, замкнуто, является надграфиком некоторой функции f_ξ. Эта функция определяется формулой

$$f_\xi : x \to \inf \{\lambda : (x, \lambda) \in \xi\}.$$

При этом $\operatorname{epi} f_\xi = \xi$. (Напомним, что по определению $\inf \varnothing = +\infty$, $\sup \varnothing = -\infty$).

Надграфик $\operatorname{epi} f$ функции f из $\tilde{R}^V$ замкнут в том и только в том случае, если f полунепрерывна снизу. Поэтому иногда полунепрерывные снизу функции называются *замкнутыми снизу* (или, если это не вызывает недоразумений, просто замкнутыми). Заметим, что замкнутое множество в пространстве $V \times R$ является надграфиком некоторой (замкнутой) функции в том и только в том случае, если оно R_+-устойчиво. Обозначим через $\tilde{R}_{cl}^V$ подмножество $\tilde{R}^V$, состоящее из замкнутых функций. Из сказанного вытекает, в частности, что справедливо следующее

Предложение 1.2. *Отображение $f \to \operatorname{epi} f$ множества $\tilde{R}_{cl}^V$ в совокупность всех замкнутых R_+-устойчивых подмножеств пространства $V \times R$ биективно*

Упорядочим множество $\tilde{R}^V$ естественным образом (т. е. считаем, что $f_1 \geqslant f_2$, если $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ для всех $x \in V$). Ясно, что при этом упорядочении $\widetilde{R}^V$ становится полной структурой (решеткой), причем супремум $\bigvee\limits_\alpha f_\alpha$ и инфимум $\bigvee\limits_\alpha f_\alpha$ любого семейства $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов $\widetilde{R}^V$ вычисляется поточечно.

Заметим, что неравенство $f_1 \geqslant f_2$ эквивалентно включению $\operatorname{epi} f_1 \subset \operatorname{epi} f_2$. Кроме того,

$$\operatorname{epi}\left(\bigvee_{\alpha \in A} f_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} \operatorname{epi} f_\alpha;$$

$$\operatorname{epi}(f_1 \wedge f_2) = (\operatorname{epi} f_1) \cup (\operatorname{epi} f_2).$$

Определим замыкание функции. Пусть $f \in \widetilde{R}^V$. Множество $\operatorname{epi} f$ является R_+-устойчивым, и потому его замыканис $\overline{\operatorname{epi} f}$ также R_+-устойчиво. Следовательно, это множество является надграфиком некоторой (замкнутой) функции, которая обозначается через $\bar{f}$ и называется *нижним замыканием* или полунепрерывной снизу *регуляризацией* функции f (или, если это не вызывает недоразумений, просто замыканием или регуляризацией f).

Из определения следует, что

$$\bar{f} = \sup\{g \in \widetilde{R}^V_{cl} : g \leqslant f\}.$$

Кроме того, для $x \in V$ справедливо соотношение

$$\bar{f}(x) = \inf_{(x_\alpha)} \varliminf_\alpha f(x_\alpha),$$

где нижняя грань вычисляется по всем сетям[1] $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, сходящимся к x. Множество $\widetilde{R}^V_{cl}$ содержит, в частности, функции f вида

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & x \in \Omega \\ +\infty & x \in V \backslash \Omega' \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\Omega \neq V, \varnothing$. Функция f имеет такой вид в том и только в том случае, если ее надграфик отличается от всего

---

[1] Определение сети (обобщенной последовательности) см., например, в [83].

пространства $V \times R$ и является *R-устойчивым множеством*, т. е. с каждой точкой (x, μ) содержит всю прямую (x, R). Будем называть непустые R-устойчивые множества, отличные от всего пространства, *цилиндрическими*. Функции вида (1.1) также назовем *цилиндрическими*.

Введем теперь определение выпуклой функции. Это удобно сделать следующим образом.

Функция f из $\bar{R}^V$ называется *выпуклой*, если ее надграфик — замкнутое выпуклое нецилиндрическое множество. Следующее предложение описывает важное свойство выпуклой функции.

Предложение 1.3. *Если функция f выпукла и существует точка $x \in V$ такая, что $f(x) = -\infty$, то $f = -\infty$.*

Доказательство. Предположим, что $f \neq -\infty$. Так как f нецилиндрическая функция, то существует точка $y \in V$, для которой $-\infty < f(y) < +\infty$. Замкнутая выпуклая оболочка прямой (x, R) и точки $(y, f(y))$ содержит всю прямую (y, R). Так как $f(x) = -\infty$, то $(x, R) \subset \operatorname{epi} f$, кроме того, $(y, f(y)) \in \operatorname{epi} f$. Поскольку множество $\operatorname{epi} f$ выпукло и замкнуто, то прямая (y, R) содержится в $\operatorname{epi} f$. Последнее означает, что $f(y) = -\infty$, что противоречит выбору точки y. Предложение доказано.

Из предложения 1.3 вытекает, что при любых $x, y \in V$ можно говорить о сумме $\alpha f(x) + \beta f(y)$. Это позволяет переформулировать определение выпуклой функции. Функция f называется *выпуклой*, если она полунепрерывна снизу, множество ее значений не совпадает с $\{-\infty, +\infty\}$ и, кроме того, для нее справедливы *неравенства выпуклости* (или *неравенства Иенсена*)

$$f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (x, y \in V;$$

$$\alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1). \tag{1.2}$$

Если про функцию f из $\bar{R}^V$ известно лишь, что для нее выполнены (и, стало быть, имеют смысл) неравенства (1.2), то будем ее называть *слабо выпуклой* функцией. (В литературе, как правило, именно такую функцию называют выпуклой. Ниже рассматриваются ситуации, когда слабая выпуклость и выпуклость неразличимы; мы надеемся, что введение необычного термина не приведет к недоразумениям).

Функция p называется *сублинейной*, если ее надграфик $\operatorname{epi} p$ является замкнутым нецилиндрическим конусом. В дальнейшем наряду с термином сублинейная функция будет использоваться термин *сублинейный функционал*. Непосредственно из определения вытекает, что сублинейный функционал является выпуклым (выпуклой функцией). Нетрудно проверить, что функционал p сублинеен в том и только в том случае, если он замкнут (полунепрерывен снизу), субаддитивен (т. е. $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ для $x, y\in V$) и положительно однороден (т. е. $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ при $x\in V$, $\lambda>0$).

Если p сублинеен, $p\neq -\infty$, $p\neq +\infty$, то $0\in\operatorname{dom} p$ и $p(0)=0$. Действительно, если $x\in\operatorname{dom} p$, то луч $(\lambda(x, p(x)))_{\lambda>0}$ входит в $\operatorname{epi} p$. Поскольку конус $\operatorname{epi} p$ замкнут, то $(0, 0)\in\operatorname{epi} p$, т. е. $p(0)\leqslant 0<+\infty$. Кроме того, $p(0)>-\infty$. Из равенства $p(0)=p(2\cdot 0)=2p(0)$ следует, что $p(0)=0$.

Покажем, что изучение выпуклых функций, определенных в л. в. п. V, можно свести к изучению сублинейных функционалов в $V\times R$.

Пусть f — выпуклая функция, определенная на V, и $f\neq+\infty$. Множество $\Omega=\operatorname{epi} f$ непусто, выпукло, замкнуто, R_+-устойчиво и не является цилиндрическим. Рассмотрим конус Γ_Ω. Напомним, что по определению $\Gamma_\Omega=\overline{\operatorname{Co}(\tilde\Omega)}$, где $\tilde\Omega=\{(x, \lambda, 1)\in V\times R\times R: (x, \lambda)\in\operatorname{epi} f\}$. Множество $\tilde\Omega$ является R_+-устойчивым по второй координате, т. е. с каждой своей точкой (x, λ, μ) содержит и весь луч $(x, \lambda+R_+, \mu)$. Отсюда следует, что и множество Γ_Ω обладает этим свойством. Это, в свою очередь, означает, что множество $\tilde\Gamma_{\Omega'}=\{(x, \lambda, \mu)\in V\times R\times R: (x, \mu, \lambda)\in\Gamma_\Omega\}$ является R_+-устойчивым и, стало быть, это множество является надграфиком некоторой функции p_f. Из определений вытекает, что $\Gamma_\Omega\cap(V\times R\times\{1\})=\tilde\Omega$, поэтому для $x\in V$ получаем

$$p_f(x, 1)=\inf\{\mu: (x, 1, \mu)\in\tilde\Gamma_\Omega{}'\}=$$
$$=\inf\{\mu: (x, \mu, 1)\in\Gamma_\Omega\}=\inf\{\mu: (x, \mu)\in\Omega\}=f(x).$$

Если $f=-\infty$, то, как следует из полученного равенства, $p_f=-\infty$. Если f принимает в какой-то точке конечное значение, то и p_f принимает в этой точке конечное значение и, следовательно, p_f не является цилиндрической функцией. Кроме того, $\bar{\bar{\Gamma}}_{\mathfrak{a}}$ — замкнутый конус, поэтому p_f — сублинейный функционал.

Таким образом, если отождествить V с гиперплоскостью $V\times\{1\}$ в пространстве $V\times R$, то выпуклую функцию f можно отождествить со следом сублинейного функционала p_f на эту гиперплоскость. Отметим, что $\operatorname{dom} p_f \subset V\times R_+$ и $\operatorname{dom} p_f \not\subset V\times\{0\}$ (при $f\neq-\infty$). Используя предложение 1.1, получаем

Предложение 1.4. *Пусть f выпуклая функция из $\bar{R}^V$, $f\neq+\infty$, $f\neq-\infty$. Существует (единственный) сублинейный функционал p_f, определенный на $V\times R$; такой что $p_f(x, 1)=f(x)$, причем* $\operatorname{dom} p_f \subset V\times R_+$ *и* $\operatorname{dom} p_f \not\subset V\times\{0\}$.

В заключение введем в рассмотрение еще один класс функций из $\bar{R}^V$. Функцию $f\in\bar{R}^V$ назовем *аффинной*, если ее надграфик является замкнутым нецилиндрическим полупространством. Аффинная функция выпукла и принимает лишь конечные значения. Замкнутая функция f аффинна в том и только в том случае, если $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, где α, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$; x, $y\in V$.

Если f — аффинная функция, то функционал $l: x\to f(x)-f(0)$ аддитивен и однороден. Из замкнутости (полунепрерывности снизу) функции f вытекает, что l ограничен снизу на некоторой окрестности нуля и поэтому непрерывен. Таким образом, если функция f аффинна, то она имеет вид $f=l+c\mathbf{1}$, где l — линейный функционал на V, а $\mathbf{1}$ — функция, определенная на V и равная тождественно 1. Наоборот, каждая функция, имеющая указанный выше вид, аффинна.

Пространство, сопряженное к л. в. п. V, условимся в дальнейшем обозначать V'. Пусть $A(V)$ — векторное пространство, состоящее из всех аффинных функций, определенных на V (операции сложения и умножения на число вводятся в этом пространстве естественным образом). Отображение $l+c\mathbf{1}\to(l, c)$ является изоморфизмом векторных пространств $A(V)$ и $V'\times R$.

2°. Теорема Хермандера. Требуется доказать теорему Хермандера, утверждающую, что функция выпукла в том и только в том случае, если она является верхней огибающей (супремумом в структуре $\bar{R}^V$ или, что то же самое, поточечным супремумом) некоторого множества аффинных функций; функционал сублинеен в том и только в том случае, если он представляет верхнюю огибающую некоторого множества линейных функционалов. С точки зрения надграфиков первое из этих утверждений означает, что надграфик выпуклой функции совпадает с пересечением некоторого множества полупространств, являющихся надграфиками аффинных функций. Известно, что всякое выпуклое замкнутое множество совпадает с пересечением замкнутых полупространств, его содержащих. Теорема Хермандера (в части, относящейся к выпуклым функциям) утверждает, что множество является нецилиндрическим, выпуклым, замкнутым, R_+-устойчивым в том и только в том случае, если оно представимо как пересечение содержащих его нецилиндрических замкнутых R_+-устойчивых полупространств.

Важно подчеркнуть, что эта теорема носит отделимостный характер, т. е. ее доказательство опирается лишь на простейшие следствия из теоремы отделимости, которая может рассматриваться как некоторый эквивалент теоремы Хана — Банаха. В этой работе под *теоремой отделимости* понимается следующее: если точка x не лежит в выпуклом замкнутом множестве S (в локально выпуклом пространстве V), то найдется гиперплоскость, отделяющая x от S (т. е. функционал l из V' такой, что $\sup\limits_{y\in S} l(y) < l(x)$). Точнее говоря, при доказательстве теоремы Хермандера используется лишь то, что второй сопряженный конус совпадает с исходным. Приведем доказательство этого простого предложения, чтобы подчеркнуть его отделимостный характер. Теорема Хермандера — яркий пример двойственности. Этот ее аспект будет рассмотрен ниже.

В дальнейшем будем считать, что в пространстве V', сопряженном к V, введена слабая топология $\sigma(V', V)$. В этом случае $V''=V$.[1] Пусть K замкнутый конус в V. Напомним, что по определению *сопряженный* к K *конус* K^* состоит из положительных на K линейных функционалов, т. е. $K^*=\{f\in V' : f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in K\}$.

Предложение 2.1.[2] *Если K замкнутый конус в V, то $K^{**}=K$.*

Доказательство. Ясно, что $K^{**}\supset K$. Предположим, что существует точка $y\in K^{**}$ такая, что $y\notin K$. Ис-

[1] Точнее говоря, пространства V и V'' (канонически) изоморфны и могут быть отождествлены (см. [30]).

[2] Этот результат иногда называют леммой Фаркаша.

пользуя теорему отделимости, найдем функционал $f \in V'$ такой, что $f(y) < 0 = \inf_{x \in K} f(x)$. Равенство $0 = \inf_{x \in K} f(x)$ показывает, что $f \in K^*$; поэтому неравенство $f(y) < 0$ означает, что $y \overline{\in} (K^*)^* = K^{**}$. Полученное противоречие и доказывает предложение.

Теорема Хермандера. (1). *Функционал p из $\bar{R}^V$ сублинеен в том и только в том случае, если существует множество Ω_p в пространстве V' такое, что*

$$p(x) = \sup_{l \in \Omega_p} l(x) \quad (x \in V). \tag{2.1}$$

(2). *Функция f из $\bar{R}^V$ выпукла в том и только в том случае, если существует множество Ω_f в пространстве $\Lambda(V)$ такое, что*

$$f(x) = \sup_{a \in \Omega_f} a(x). \tag{2.2}$$

Доказательство. Функция, являющаяся верхней огибающей множества линейных (соответственно, аффинных) функций, является сублинейной (соответственно, выпуклой). Остановимся поэтому лишь на доказательстве того, что каждый сублинейный функционал имеет вид (2.1), а затем, что каждая выпуклая функция представима в виде (2.2).

Пусть p — сублинейный функционал. Если $p = +\infty$, то в качестве Ω_p можно взять все пространство V'; если $p = -\infty$, то $\Omega_p = \varnothing$. Рассмотрим случай, когда p принимает конечное значение хотя бы в одной точке. В этом случае надграфик K функционала p является непустым замкнутым конусом, несовпадающим со всем пространством $V \times R$. Так как $p(0) = 0$, то K содержит луч $(0, R_+)$. В процессе доказательства будем считать, что функционал (l, λ) из пространства $(V \times R)' = V' \times R$ действует следующим образом: $(l, \lambda) : (x, \mu) \to l(x) - \lambda\mu$. Учитывая это, рассмотрим конус $-K^*$, сопряженный к $-K$,

$$-K^* = \{(l, \lambda) \in V' \times R : l(x) - \lambda\mu \leqslant 0 \ ((x, \mu) \in K)\}.$$

Так как $(0, 1) \in K$, то для $(l, \lambda) \in -K^*$ имеем $\lambda \geqslant 0$, т. е. $-K^*$ лежит в полупространстве $V' \times R_+$. Далее, $-K^*$ не лежит в гиперплоскости $V' \times \{0\}$. Действительно, если $-K^* \subset V' \times \{0\}$, то $-K = (-K^*)^* = -K^{**} \supset (V' \times \{0\})^*$; но $(V' \times \{0\})^* = (0, R)$), т. е. надграфик K

функционала p содержит прямую $(0, R)$, откуда по предложению 1.3 вытекает, что $p=-\infty$. Итак, $-K^*\in V'\times R_+$, $-K^*\not\subset V'\times\{0\}$. Из предложения 1.1 следует, что найдется непустое выпуклое замкнутое множество Ω в пространстве V' такое, что $-K^*=\Gamma_\Omega(=\overline{\mathrm{Co}(\widetilde{\Omega})})$, где $\widetilde{\Omega}=\{(l, 1)\in V'\times R: l\in\Omega\}$. Введем в рассмотрение функционал $\hat{p}$, определенный на V формулой

$$\hat{p}: x\to\sup_{l\in\Omega} l(x).$$

Обозначим через $\hat{K}$ надграфик этого функционала. Имеем $\hat{K}=\{(x, \mu)\in V\times R: \mu\geqslant l(x)$ при всех $l\in\Omega\}=$ $=\{(x, \mu)\in V\times R: l(x)-\mu\nu\leqslant 0$ при всех $(l, \nu)\in\mathrm{Co}(\widetilde{\Omega})\}=$ $=-(\mathrm{Co}(\widetilde{\Omega}))^*=-(\overline{\mathrm{Co}(\widetilde{\Omega})})^*=-\Gamma_\Omega^*$.

Так как $\Gamma_\Omega=-K^*$, то $-\Gamma_\Omega^*=-(-K^*)^*=K$. Следовательно, $\hat{K}=K$. Поскольку надграфики функционалов p и $\hat{p}$ совпадают, то и сами эти функционалы совпадают. Таким образом, $p(x)=\sup\limits_{l\in\Omega} l(x)\ (x\in V)$, что и завершает доказательство первой части теоремы.

Вторая часть теоремы следует из первой, если воспользоваться предложением 1.4 и изоморфизмом пространств $A(V)$ и $V'\times R$. Теорема доказана.

Теорема Хермандера позволяет показать, что выпуклые функции, заданные не на всем пространстве V, также являются верхними огибающими множеств аффинных функций.

Введем сначала определение. Пусть ξ — выпуклое множество в локально выпуклом пространстве V. Функция a, определенная на ξ, называется *аффинной*, если она принимает лишь конечные значения, непрерывна и, кроме того,

$$a(\alpha x+\beta y)=\alpha a(x)+\beta a(y)\quad (x,\ y\in\xi;\ \alpha+\beta=1;\quad \alpha,\ \beta\geqslant 0).$$

(Если $\xi=V$, это определение совпадает с данным в пункте 1^0). След на ξ функции из $A(V)$ является аффинной функцией на ξ. Обратное, вообще говоря, неверно. Приведем соответствующий пример (рассмотренный в [159]).

Пример 2.1. Рассмотрим пространство l^2, наделенное слабой (ослабленной) топологией, и множество

ξ в l^2, состоящее из всех последовательностей $x=(x_n)$ таких, что $|x_n| \leqslant 2^{-n}$. Для $x \in \xi$ положим $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Функция f, определенная таким образом, аффинна на ξ, но не является следом никакой функции из $A(l^2)$.

Функцию $f: \xi \to \bar{R}$ назовем *выпуклой* (на ξ), если ее надграфик $\operatorname{epi} f=\{(x, \mu) \in \xi \times R: \mu \geqslant f(x)\}$ является выпуклым замкнутым нецилиндрическим множеством. Цилиндричность множества определяется здесь так же, как и при $\xi=V$. (В случае, если ξ является конусом, можно аналогичным образом определить сублинейный на ξ функционал.) Иными словами, функция f выпукла (на ξ), если она полунепрерывна снизу, множество ее значений не совпадает с $\{-\infty, +\infty\}$ и она удовлетворяет неравенствам выпуклости. Каждой функции f из $\bar{R}^{\xi}$ $(f \neq -\infty)$ поставим в соответствие функцию $\tilde{f}$ из $\bar{R}^V$, положив

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x \in \xi \\ +\infty & x \bar{\in} \xi. \end{cases}$$

Если же $f: x \to -\infty$, то положим $\tilde{f}=-\infty$[1].

Функция f выпукла в том и только в том случае, если выпукла $\tilde{f}$. Применяя к функции $\tilde{f}$ теорему Хермандера, можно убедиться в том, что каждая выпуклая на ξ функция является верхней огибающей некоторого множества аффинных на ξ функций (и, более того, следов функций, аффинных на V).

3°. Простейшие примеры супремально порождающих конусов. Результаты, изложенные в пункте 2°, показывают, что элементы некоторого достаточно обширного класса функций (выпуклые функции) представимы как верхние огибающие (поточечные супремумы) подмножеств существенно более узкого и простого класса функций (аффинных функций). Здесь будет разобран еще один пример подобной ситуации.

Рассмотрим на вещественной прямой промежуток $[a, b]$. Пусть $A([a, b])$ — совокупность аффинных на $[a, b]$ функций ($f \in A([a, b])$, если $f: x \to cx+d$). Функция f из $\bar{R}^{[a, b]}$ выпукла в том и только в том случае, если она является верхней огибающей некоторого подмно-

---

[1] Эта идея доопределения выпуклых функций принадлежит Фенхелю [160].

жества из $A([a, b])$. Добавим к двухмерному векторному пространству $A([a, b])$ луч, натянутый на функцию $x \to -x^2$, т. е. рассмотрим множество, состоящее из всех определенных на $[a, b]$ квадратных трехчленов $h: x \to kx^2+lx+m$ (где $k \leqslant 0$).

Предложение 3.1. *Функция $f: [a, b] \to (-\infty, +\infty]$ — полунепрерывна снизу в том и только в том случае, если она является верхней огибающей некоторого (непустого) множества вогнутых квадратных трехчленов.*

Доказательство. Каждый квадратный трехчлен непрерывен, поэтому верхняя огибающая любого множества трехчленов полунепрерывна снизу. Докажем, что каждая полунепрерывная снизу функция есть поточечный супремум некоторого множества трехчленов. Не уменьшая общности, будем считать, что $f(x) < +\infty$ при всех $x \in [a, b]$. Так как f полунепрерывна снизу, то существует число M такое, что $M < \min\limits_{t \in [a,b]} f(t)$. Кроме того, для каждого $x \in [a, b]$ и $\varepsilon \in \left(0, \min\limits_{t \in [a,b]} f(t) - M\right)$ существует $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ такое, что $f(t) > f(x) - \varepsilon$ при $t \in (x - \delta_{x,\varepsilon}, x + \delta_{x,\varepsilon})$. Для указанных x и ε и $\delta \in (0, \delta_{x,\varepsilon})$ положим

$$g_{x,\varepsilon,\delta}: t \to (f(x) - \varepsilon) - \frac{1}{\delta^2}(f(x) - \varepsilon - M)(t - x)^2$$

$$(t \in [a, b]).$$

Проверяется, что $g_{x,\varepsilon,\delta} \leqslant f$ и, кроме того, $g_{x,\varepsilon,\delta}(x) = f(x) - \varepsilon$. Из изложенного следует равенство $f = \sup\limits_{x,\varepsilon,\delta} g_{x,\varepsilon,\delta}$. Предложение доказано.

Замечание. Трехчлен $g_{x,\varepsilon,\delta}$, фигурирующий в доказательстве предложения, можно записать в виде

$$g_{x,\varepsilon,\delta}(t) = -\frac{c}{\delta^2}t^2 + \left(\frac{2c}{\delta^2}x\right)t - \left(\frac{c}{\delta^2}x^2 - f(x) + \varepsilon\right),$$

где $c = f(x) - \varepsilon - M > 0$. Положим

$$k = -\frac{c}{\delta^2}, \quad l = \frac{2c}{\delta^2}x, \quad m = -\left(\frac{c}{\delta^2}x^2 - f(x) + \varepsilon\right).$$

При $x \neq 0$ и достаточно малых δ выполняется неравенство $m \leqslant 0$; кроме того, $k \leqslant 0$. Знак числа l зависит от знака x; если считать, что $a>0$, то $l\geqslant 0$ (в общем случае следует разложить $g_{x,\varepsilon,\delta}$ по степеням $(x-a')$, где $a'<a$).

Полученный в предложении 3.1 простой результат достаточно интересен. Он показывает, что даже такое весьма обширное множество, как множество всех полунепрерывных снизу функций, может порождаться с помощью операции взятия верхней огибающей подмножеств очень узкого множества — конуса, натянутого всего на три образующих. По существу, важен лишь тот факт, что этот конус порождает с помощью поточечного супремума все пространство $C([a, b])$ непрерывных на $[a, b]$ функций. Конусы, «супремально порождающие» $C(Q)$, где Q — компактное топологическое пространство, обладают рядом весьма интересных свойств и подробно изучаются в главе III.

В некоторых случаях порождение следует рассматривать не с помощью поточечного супремума, а с помощью супремума в смысле некоторой другой структуры. Приведем соответствующий пример.

Рассмотрим пространство $C([a, b])$ и подпространство $C_{\text{per}}([a, b])$ этого пространства, состоящее из функций, принимающих на концах промежутка равные значения. Любая функция $f\in C([a, b])$, являющаяся верхней огибающей какого-либо множества из $C_{\text{per}}([a, b])$, сама входит в $C_{\text{per}}([a, b])$. Поэтому, оставаясь в рамках $C([a, b])$ и используя поточечный супремум, мы не выйдем за пределы $C_{\text{per}}([a, b])$. Пространство $C([a, b])$ является структурой относительно естественного отношения порядка. При этом супремум бесконечного множества элементов из $C([a, b])$ (если он существует), вообще говоря, не совпадает с верхней огибающей этого множества. Покажем, что любая функция из $C([a, b])$ является супремумом (в структуре $C([a, b])$) некоторого множества из $C_{\text{per}}([a, b])$. На основе предложения 3.1 достаточно показать, что таким свойством обладают лишь квадратные трехчлены $x\to kx^2+lx+m$ $(k\leqslant 0)$, так как верхняя огибающая множества непрерывных функций, в случае если она непрерывна, является супремумом этого множества в $C([a, b])$.

Пусть $h: x\to kx^2+lx+m$ $(k\leqslant 0)$ — квадратный трехчлен. Положим $c=\min\limits_{x\in[a,b]} h(x)$. Для любого натурального n такого, что $b-a>\frac{2}{n}$, определим непрерывную функцию h_n, положив

$$h_n(x)=h\ (x)\left(x\in\left[a+\frac{1}{n},\ b-\frac{1}{n}\right]\right);\ h_n(a)=h_n(b)=c$$

и h_n аффинна на отрезках $\left[a, a+\frac{1}{n}\right]$; $\left[b-\frac{1}{n}, b\right]$. По построению $h_n\in C_{\text{рег}}([a,\ b])$. Трехчлен h вогнут (так как $k\leqslant 0$) и потому $h_n\leqslant h$. Ясно, что $h=\sup\limits_{k}{}_C h_n$, откуда и следует наше утверждение.

Приведенные примеры наводят на мысль изучить конструкцию построения некоторой функции, как супремума (в той или иной структуре) множества функций заданного класса. Исследованию этой конструкции и ее приложений и посвящена настоящая книга.

ГЛАВА I

H-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ И МНОЖЕСТВА

0°. Введение. См. Введение[1].

1°. Схема двойственности Минковского — Фенхеля. Рассмотрим полную структуру Y с наименьшим элементом $-\infty$. Пусть X — подмножество Y, H подмножество X, т. е. $H \subset X \subset Y$, причем $-\infty \in \overline{H}$.

Будем говорить, что *элемент $p \in X$ является H-выпуклым*, если найдется множество U в H такое, что $p = \sup U$. Совокупность всех H-выпуклых элементов X обозначим через $P(H, X, Y)$. Для $p \in Y$ положим

$$U_p = \{h \in H : h \leqslant p\}.$$

Если U — подмножество H и $p = \sup U$, то $U \subset U_p$. В этом случае $p = \sup U_p$. Элемент $h \in U_p$ будем называть *опорным* к p элементом, а само множество U_p — множеством опорных (или *опорным множеством*) к p.

Подмножество U множества H назовем *H-выпуклым*, если $U = \{h \in H : h \leqslant \sup U\}$, т. е. если U опорно к $p = \sup U$. Если $p = -\infty$, то $U_p = \varnothing$, т. е. пустое множество является H-выпуклым. Совокупность всех H-выпуклых множеств U, опорных к элементам из X, обозначим через $\mathfrak{B}(H, X, Y)$. Заметим, что $\mathfrak{B}(H, Y, Y)$ совпадает с совокупностью всех H-выпуклых множеств. (В дальнейшем, когда из контекста будет ясно, о каких X и Y идет речь, в обозначениях $P(H, X, Y)$ и $\mathfrak{B}(H, X, Y)$ одна из букв X, Y или обе эти буквы будут опускаться). Упорядочим $\mathfrak{B}(H)$ по включению. В множестве $P(H)$ введем отношение порядка, индуцируемое из Y. Отображение $\varphi : P(H) \to \mathfrak{B}(H)$, действующее по формуле

$$\varphi : p \to U_p, \tag{1.1}$$

[1] Этот пункт добавлен для единообразия (ср. [184]).

очевидно, является изоморфизмом упорядоченных множеств $P(H)$ и $\mathfrak{B}(H)$. Отображение φ, определенное формулой (1.1), называется *двойственностью Минковского.*

Пусть $U \subset H$. Положим $p_U = \sup U$ и рассмотрим множество $U_{p_U} = \{h \in H : h \leqslant p_U\}$. Если $V \in \mathfrak{B}(H, Y, Y)$ и $V \supset U$, то $p_V = \sup V \geqslant p_U$, откуда следует, что $U_{p_V} = V \supset U_{p_U}$. Таким образом, U_{p_U} является наименьшим среди всех элементов множества $\mathfrak{B}(H, Y, Y)$, содержащих U. Множество U_{p_U} называется *H-выпуклой оболочкой* U и обозначается символом $\mathrm{co}_H(U)$. Заметим, что $\mathrm{co}_H(U) = U$ в том и только в том случае, если U является H-выпуклым множеством. Если $p_U \in X$ (где $H \subset X \subset Y$), то множество $\mathrm{co}_H(U)$ входит в $\mathfrak{B}(H, X, Y)$.

Имеет место следующее

Предложение 1.1. *Совокупность $\mathfrak{B}(H, Y, Y)$ всех H-выпуклых множеств является полной структурой. При этом, если $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ семейство из $\mathfrak{B}(H, Y, Y)$, то*

$$\bigwedge_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha; \quad \bigvee_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathrm{co}_H\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right).$$

Доказательство. При всех $\alpha \in A$ имеем

$$\mathrm{co}_H\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \subset \mathrm{co}_H(U_\alpha) = U_\alpha$$

и потому $\mathrm{co}_H\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$. С другой стороны, $\mathrm{co}_H\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \supset \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$. Таким образом, множество $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ H-выпукло и потому оно совпадает с инфимумом семейства $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Пусть теперь $V \in \mathfrak{B}(H, Y, Y)$ и $V \supset U_\alpha (\alpha \in A)$. Тогда $V \supset \mathrm{co}_H\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right)$, откуда и следует, что множество $\mathrm{co}_H\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right)$ является супремумом семейства $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Предложение доказано.

Замечание 1. Отображение $U \to \mathrm{co}_H(U)$, определенное на совокупности всех подмножеств H, удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\mathrm{co}_H(U) \supset U$;

(2) $\mathrm{co}_H(\mathrm{co}_H(U)) = \mathrm{co}_H(U)$;

(3) если $U_1 \supset U_2$, то $\mathrm{co}_H(U_1) \supset \mathrm{co}_H(U_2)$.

Это означает, что отображение co_H является *замыканием в смысле Мура* [12]. Предложение 1.1 является просто конкретизацией теоремы Мура для рассматриваемой ситуации.

Замечание 2. Двойственный подход к H-выпуклости заключается в следующем. Положим $\varphi_H(x) = \sup\limits_{h\leqslant x,\, h\in H} h$. Тогда $\varphi_H(x)\geqslant\varphi_H(y)$, если $x\geqslant y$. Кроме того, $\varphi_H(\varphi_H(x))=\varphi_H(x)$. Такие отображения называют *операторами замыкания* [153]. Элемент x называют *φ_H-замкнутым*, если $\varphi_H(x)=x$. Ясно, что множества H-выпуклых и φ_H-замкнутых элементов совпадают.

Двойственность Минковского показывает, что совокупность $P(H, Y, Y)$ всех H-выпуклых элементов Y является полной структурой, изоморфной структуре $\mathfrak{V}(H, Y, Y)$. При этом супремум любого семейства $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ элементов структуры $P(H, Y, Y)$ совпадает с супремумом этого семейства, вычисленным в Y. Рассмотрим H-выпуклые множества U_{p_α} $(\alpha\in A)$ и супремум $\mathrm{co}_H\left(\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_{p_\alpha}\right)$ семейства $\left(U_{p_\alpha}\right)_{\alpha\in A}$. Обозначим через $\sup_P$ и $\sup_Y$ супремумы, вычисленные в $P(H, Y, Y)$ и Y соответственно. Используя двойственность Минковского φ, получаем

$$\sup_{\alpha\in A}{}_P\, p_\alpha = \varphi^{-1}\left(\sup_{\alpha\in A} U_{p_\alpha}\right) = \varphi^{-1}\left(\mathrm{co}_H\left(\bigcup_{\alpha\in A} U_{p_\alpha}\right)\right) =$$
$$= \sup{}_Y\, \mathrm{co}_H\left(\bigcup_{\alpha\in A} U_{p_\alpha}\right) = \sup{}_Y\left(\bigcup_{\alpha\in A} U_{p_\alpha}\right) =$$
$$= \sup{}_Y\left(\sup_{\alpha\in A}{}_Y U_{p_\alpha}\right) = \sup_{\alpha\in A}{}_Y\, p_\alpha,$$

что и требовалось.

Аналог этого утверждения для нижней грани неверен (это легко проверяется на примерах, в частности, см. пример 2.1).

Непосредственно из сказанного следует

Предложение 1.2. *Пусть множество X является верхней полуструктурой, причем супремум двух элементов из X, вычисленный в X, совпадает с супремумом этих элементов, вычисленным в Y. Множество $P(H, X, Y)$ (и, стало быть, $\mathfrak{V}(H, X, Y)$) является верхней полуструктурой, причем супремумы двух элементов из $P(H, X, Y)$, вычисленные в X и $P(H, X, Y)$, совпадают.*

Введем следующее определение.

Множество S назовем *полулинейным пространством*, если в нем введена бинарная операция $+$, относительно которой S является коммутативной полугруппой, и операция умножения на положительное число, причем

$$(1)\quad 1\cdot s = s \quad (s\in S);$$

$$(2)\quad \lambda s+\mu s=(\lambda+\mu)s \quad (\lambda,\ \mu\geqslant 0;\ s\in S);$$

$$(3)\quad \lambda(s_1+s_2)=\lambda s_1+\lambda s_2 \quad (\lambda>0;\ s_1,\ s_2\in S);$$

$$(4)\quad (\lambda\mu)s=\lambda(\mu s) \quad (\lambda,\ \mu>0;\ s\in S).$$

В полулинейном пространстве естественным образом вводится понятие выпуклого множества (множество U *выпукло*, если $\alpha u+\beta v\in U$ как только $u,\ v\in U$, $\alpha+\beta=1$ и $\alpha,\ \beta>0$). В этом пространстве определяется алгебраическая сумма U_1+U_2 множеств U_1 и U_2 ($U_1+U_2=\{s\in S: s=u_1+u_2;\ u_i\in U_i\ i=1,\ 2\}$) и произведение λU множества U на положительное число λ ($\lambda U=\{s\in S : s=\lambda u,\ u\in U\}$). Простейшим примером полулинейного пространства может служить конус K в векторном пространстве (заметим, что K является полулинейным пространством с *сокращением*: из равенства $x+y=z+y$ следует, что $x=z$).

Полулинейное пространство S, в котором введено отношение порядка $\geqslant$, назовем *K-полулинеалом*, если

(1) S является верхней полуструктурой;

(2) неравенство $x\geqslant y$ влечет соотношение $x+z\geqslant y+z$ при всех $z\in S$;

(3) из соотношения $x\geqslant y$ следует, что $\lambda x\geqslant\lambda y$ ($\lambda>0$).

Обычным образом вводится понятие изоморфизма K-полулинеалов. Сделаем некоторые предположения относительно множества X. В дальнейшем будем считать, что

(1) X является верхней полуструктурой (относительно порядка, индуцированного из Y), причем супремумы двух элементов из X, вычисленные в X и Y, совпадают;

(2) в множество X введены алгебраические операции, относительно которых оно является K-полулинеалом;

(3) если $A_1\subset X$, $A_2\subset X$ и существуют верхние грани $\sup A_1$ и $\sup A_2$, то из неравенства $x\geqslant a_1+a_2$ для всех $a_i\in A_i (i=1,\ 2)$ следует, что $x\geqslant\sup A_1+\sup A_2$.

Установим связь между алгебраическими свойствами H и $\mathfrak{V}(H, X)$ ($P(H, X)$). Предположим сначала, что H является выпуклым множеством. Покажем, что в этом случае и множество $P(H)$ выпукло. Пусть $p_i \in P(H)$, $U_i = U_{p_i}$ $(i = 1, 2)$. Заметим, что $\alpha U_1 + \beta U_2$ входит в H при всех α, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Элемент $\alpha p_1 + \beta p_2$ мажорирует любой элемент множества $\alpha U_1 + \beta U_2$. С другой стороны, если $p' \geqslant \alpha u_1 + \beta u_2$ $(u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2)$, то $p' \geqslant \alpha \sup U_1 + \beta \sup U_2 = \alpha p_1 + \beta p_2$. Таким образом, $\sup(\alpha U_1 + \beta U_2) = \alpha p_1 + \beta p_2 \in X$, что и доказывает требуемое утверждение. Заметим, что выпуклость H влечет выпуклость множеств из $\mathfrak{V}(H)$.

Пусть теперь H — полулинейное пространство. Тогда, рассуждая тем же способом, можно проверить, что $P(H)$ — полулинейное пространство и, более того, $P(H)$ есть K-полулинеал (относительно алгебраических операций и порядка, индуцированных из X). Перейдем к рассмотрению множества $\mathfrak{V}(H)$. Введем в него естественным образом операцию умножения на положительное число и бинарную операцию $\oplus$ (*сумму Минковского*)

$$U_1 \oplus U_2 = \mathrm{co}_H(U_1 + U_2) \quad (U_1,\ U_2 \in \mathfrak{V}(H)).$$

Заметим, что двойственность Минковского φ обладает следующими свойствами:

$$\varphi(\lambda p) = \lambda\varphi(p) \qquad (\lambda > 0);\quad \varphi(p_1 + p_2) = \varphi(p_1) \oplus \varphi(p_2).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{V}(H)$ является K-полулинеалом (относительно введенных алгебраических операций и порядка по включению). Кроме того, имеет место

Теорема Минковского — Фенхеля. *Двойственность Минковского является изоморфизмом K-полулинеалов $P(H)$ и $\mathfrak{V}(H)$.*

Отметим, что известные работы по схеме Минковского — Фенхеля (в случае локально выпуклых пространств) в содержательной части состоят в формулировании условий на H-выпуклые элементы и множества в терминах самого H (но не X). При этом, как правило, в качестве X принимают некоторый K-полулинеал (чаще K-линеал [1]), состоящий из функций, заданных на не-

---

[1] Относительно понятий теории полуупорядоченных пространств см. Приложение I.

котором выпуклом множестве Q, а в качестве H — полулинейное пространство, состоящее из линейных или аффинных функций (при этом Y совпадает с $\bar{R}^Q$). Требуемые условия в этой ситуации получаются с помощью тех или иных теорем отделимости. Поэтому представляет интерес выяснить связь между H-выпуклостью и отделимостью.

Рассмотрим некоторое множество Q. Полную структуру $\bar{R}^Q$ обозначим через Y. Пусть X — это условно полная верхняя полуструктура в Y, причем супремум (в X) любого ограниченного в X множества совпадает с поточечным супремумом (т. е. с супремумом в Y). Справедливо

Предложение 1.3. *Множество $U \subset H$ (где $H \subset X$) входит в $\mathfrak{V}(H, X, Y)$ в том и только в том случае, если оно ограничено сверху в X и для любого $h' \in H \setminus U$ найдется элемент $x \in Q$ такой, что*

$$h'(x) > \sup_{h \in U} h(x). \tag{1.2}$$

Доказательство. Ограниченность сверху множества U эквивалентна тому, что $p_U = \sup U$ входит в X. Условие (1.2) является непосредственным следствием H-выпуклости множества U. С другой стороны, если это условие выполнено, то неравенство $h' \leqslant p_U$, где $h' \in H$, влечет соотношение $h' \in U$, а это и означает, что U является H-выпуклым множеством.

В дальнейшем, если X является множеством функций на множестве Q и Y совпадает с $\bar{R}^Q$, то H-выпуклые элементы X будем называть H-выпуклыми функциями.

Остановимся на связи между H-выпуклостью и *выпуклостью по Фаню*. Пусть Q — некоторое множество и Φ — семейство вещественнозначных функций, заданных на Q, разделяющее точки из Q. (Последнее означает, что для любых $x, y \in Q$ найдется функция $\varphi \in \Phi$ такая, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.)

Множество A из Q называется Φ-выпуклым (в смысле Фаня), если для каждого $x \in Q \setminus A$ существует такая функция $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(x) > \sup_{y \in A} \varphi(y)$.

Будем считать множество Q вложенным к K-полулинеал R^Φ следующим образом: каждая точка $x \in Q$ отождествляется с (δ)-функцией $\hat{x}: \varphi \to \varphi(x)$ $(\varphi \in \Phi)$. Совокупность всех функций вида $\hat{x}$, где $x \in Q$, обозначим через Q_Φ; знаком $\wedge$ будем обозначать и сам оператор вложения Q в R^Φ. Из предложения 1.3 получается

Предложение 1.4. *Множество A из Q является Φ-выпуклым в том и только в том случае, если множество $\hat{A}$ из R^Φ является Q_Φ-выпуклым.*

В пункте 2° приводятся наиболее типичные и используемые в дальнейшем классы H-выпуклых функций и множеств. Конкретизации теоремы Минковского — Фенхеля, как правило, не формулируются. Для описания некоторых из этих классов будет удобно ввести в рассмотрение один специальный K-полулинеал функций. Пусть Q — некоторое множество. Через X_Q обозначим множество, состоящее из всех функций $f: Q \to (-\infty, +\infty]$, а также функции $-\infty$. Множество X_Q является полной структурой относительно порядка, индуцированного из $\bar{R}^Q$. (При этом для любого множества из X_Q верхние грани, вычисленные в X_Q и $\bar{R}^Q$, совпадают.) Введем в X_Q операции сложения и умножения на положительное число: в множестве $X_Q \setminus \{-\infty\}$ эти операции вводятся естественным образом. Кроме того, положим $x+(-\infty) = -\infty$ для любого $x \in X_Q$ и $\lambda(-\infty) = -\infty$ для любого $\lambda \geqslant 0$. В результате X_Q превращается в полулинейное пространство и, более того, в K-полулинеал.

2°. Примеры H-выпуклых функций и множеств. Здесь приводятся примеры H-выпуклых функций, где H — конусы, состоящие из линейных функционалов, определенных на локально выпуклом пространстве. В такой ситуации H-выпуклые функции — это те или иные сублинейные функционалы, а H-выпуклые множества — это соответствующие им выпуклые множества. Исторически именно сублинейные функционалы и их связь с выпуклыми множествами послужили основой теории двойственности Минковского. В то же время теория сублинейных функционалов и различных классов отвечающих им выпуклых множеств в настоящее время наиболее разработана и нашла наибольшее число приложений в различных разделах современного анализа. Более того, изучение многих вопросов теории двойственности Минковского основано на использовании свойств сублинейных функционалов и опорных к ним множеств. В связи с этим излагаемые в дальнейшем конструкции, как правило, иллюстрируются на вводимых в этом пункте классах объектов. Итак, *Пример* 2.1. Рассмотрим л. в. п. V и положим $Y=\bar{R}^V$, $X=X_V$ $H=V'$. Опишем H-выпуклые функции и множества. Как следует из теоремы Хермандера, функционал p из X_V является H-выпуклым в том и только в том случае, если он сублинеен. Заметим, что для любого множества U из H функция $\sup U$ входит в X_V. Поэтому $P(H, X_V, Y)=P(H, Y, Y)$ и, стало быть, $\mathfrak{B}(H, X_V, Y)=\mathfrak{B}(H, Y, Y)$, т. е. каждое H-выпуклое множество входит в $\mathfrak{B}(H, X_V, Y)$. Чтобы описать H-выпуклые множества, воспользуемся предложением 1.3. По этому предложению множество $U\subset H$ является H-выпуклым в том и только в том случае, если U можно представить как пересечение содержащих его полупространств, т. е. если U является выпуклым и замкнутым (в топологии $\sigma(V', V)$). Отсюда следует, что для любого $U\subset H$ множество $\mathrm{co}_H(U)$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой $\overline{\mathrm{co}}(U)$ множества U.

Множество $\mathfrak{B}(H)$ является K-полулинеалом. Умножение на положительное число вводится в него естественным образом, а сумма Минковского $\oplus$ определяется так: если U_1 и U_2 непусты, то $U_1\oplus U_2=\overline{U_1+U_2}$; кроме того, $U\oplus\varnothing=\varnothing$ для любого $U\in\mathfrak{B}(H)$. На основе предложения 1.1 $\mathfrak{B}(H)$ является полной структурой; если $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ — семейство элементов из $\mathfrak{B}(H)$, то

$$\bigwedge_{\alpha\in A} U_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A} U_\alpha;\ \bigvee_{\alpha\in A} U_\alpha=\overline{\mathrm{co}}\Big(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha\Big).$$

В K-полулинеале $P(H)$ алгебраические операции и отношение порядка индуцированы из X_V. Множество $P(H)$ также является полной структурой, при этом верхняя грань в $P(H)$ семейства $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ совпадает с верхней гранью этого семейства, вычисленной в X_V, т. е. с поточечным супремумом этого семейства. Нижняя грань семейства $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ называется *сублинейной огибающей* этого семейства. Сублинейная огибающая, как правило, отлична от поточечного инфимума рассматриваемого семейства. Так, например, если $h_1, h_2\in H$ и $h_1\neq h_2$, то $h_1\wedge h_2$ совпадает с $-\infty$, но не с функцией $v\to h_1(v)\bigwedge h_2(v)$.

Пример 2.2. Пусть V, Y и H те же, что и в предыдущем примере, а X совпадает с векторным пространством R^V всех функций $f: V\to R$. В этом случае H-выпуклые функции (т. е. элементы множества $P(H, X, Y)$ являются сублинейными функционалами, принимающими лишь конечные значения. Пусть $U \in \mathfrak{B}(H, Y, Y)$. Функционал $p_U = \sup U$ $(p_U : v \to \sup_{h \in U} h(v))$ входит в R^V в том и только в том случае, если множество U ограничено в топологии $\sigma(V', V)$. Таким образом, $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{B}(H, R^V, Y)$ состоит из всех непустых ограниченных и замкнутых в $\sigma(V', V)$ выпуклых множеств. При этом $P(H, R^V)$ (соответственно $\mathfrak{B}(H, R^V)$) является K-полулинеалом, алгебраические операции и порядок в котором индуцированы из $P(H, X_V)$ (соответственно из $\mathfrak{B}(H, X_V)$); кроме того, этот полулинеал является условно полной верхней полуструктурой.

Пример 2.3. В дальнейшем непрерывную функцию будем считать конечной (т. е. действующей в R). Предположим, что X совпадает с пространством $C(V)$ всех непрерывных на V функций (при этом считается, что V, Y и H те же, что и раньше). Множество $P(H, C(V))$ состоит из всех непрерывных на V сублинейных функционалов. Заметим, что сублинейный функционал, определенный на V, непрерывен в том и только в том случае, если он ограничен, т. е. если существует окрестность нуля W, для которой $\sup_{w \in W} |p(w)| < +\infty$.

Ограниченность функционала p эквивалентна равностепенной непрерывности множества U_p. Таким образом, K-полулинеал $\mathfrak{B}(H, C(V))$ состоит из всех выпуклых замкнутых (в $\sigma(V', V)$) равностепенно непрерывных множеств.

Предположим, что пространство V бочечно [30]. Тогда равностепенная непрерывность множества V' эквивалентна его слабой ограниченности и потому $\mathfrak{B}(H, R^V) = \mathfrak{B}(H, C(V))$. Последнее означает, что каждый сублинейный на V функционал, принимающий лишь конечные значения, непрерывен.

Заметим, что классическая теорема Минковского — Фенхеля, собственно, и описывает изоморфизм между K-полулинеалами (и одновременно условно полными верхними полуструктурами) $P(H, C(V))$ и $\mathfrak{B}(H, C(V))$ в случае, когда $V = R^n$ (символом R^n здесь и в дальнейшем обозначается n-мерное числовое пространство). Теорема показывает, что совокупности выпуклых компактов в R^n и конечных сублинейных функционалов над R^n с точки зрения алгебраической и порядковой структур неразличимы. Именно это обстоятельство является решающим при исследовании ряда задач теории выпуклых поверхностей. Подобные задачи приводятся в главе IV.

Пример 2.4. Пусть K *воспроизводящий* конус в л. в. п. V (т. е. $V=K-K$). Положим $Y=\bar{R}^K$. Рассмотрим сопряженное к V пространство V' и через H обозначим конус в $\bar{R}^K$, составленный из следов элементов V' на K.

В рассматриваемой ситуации K-полулинеал $P(H, X_K)=P(H, X_K, Y)$ состоит из всех сублинейных функционалов, определенных на K. Будем считать, что элементами $P(H, X_K)$ являются сублинейные функционалы p, определенные на всем пространстве V, и такие, что $\operatorname{dom} p\subset K$. Чтобы описать $\mathfrak{B}(H, X_K)$, введем следующее определение.

Пусть L — конус в векторном пространстве Z. Непустое множество Ω из Z называется L-*устойчивым*, если $\Omega+L=\Omega$. Пустое множество L-устойчиво по определению. Справедливо

Предложение 2.1. *Пусть K — замкнутый конус в пространстве V. Сублинейный функционал $p: V\to(-\infty, +\infty]$ обладает тем свойством, что $\operatorname{dom} p\subset K$ в том и только в том случае, если множество его опорных U_p является $(-K^*)$-устойчивым.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{dom} p\subset K$, $h\in U_p$ и $h'\in(-K^*)$. Считаем, что $\operatorname{dom} p\neq\varnothing$. Для $v\in\operatorname{dom} p$ имеем $p(v)\geqslant h(v)\geqslant h(v)+h'(v)$. Это означает, что $h+h'\in U_p$, откуда и следует $(-K^*)$-устойчивость U_p. Пусть теперь известно, что U_p является $(-K^*)$-устойчивым. Если $v\bar{\in} K$, то найдем, используя теорему отделимости, функционал $f\in(-K^*)$ такой, что $f(v)>0$. Зафиксируем произвольный элемент $h'\in U_p$. Тогда

$$p(v)=\sup_{h\in U_p} h(v)\geqslant\sup_{\lambda>0}(h'+\lambda f)(v)=+\infty,$$

т. е. $v\bar{\in}\operatorname{dom} p$. Предложение доказано.

Из предложения 2.1 следует, что K-полулинеал $\mathfrak{B}(H, X_K)$ состоит из всех выпуклых, замкнутых и $(-K^*)$-устойчивых множеств. Нетрудно проверить, что H-выпуклая оболочка co_H выпуклого множества U, содержащегося в H, совпадает с множеством $\overline{U-K^*}$.

Пример 2.5. Пусть K и L — замкнутые конусы в л. в. п. V, причем $K\supset L$ и L — воспроизводящий конус. Рассмотрим сопряженный к K конус K^* и через $H_{K,L}$ обозначим совокупность следов функционалов из K^* на

L. Множество $H_{K,L}$ является конусом в пространстве R^L. Нас будут интересовать K-полулинеалы

$$P(H_{K,L}) = P(H_{K,L}, R^L, \bar{R}^L) \text{ и } \mathfrak{B}(H_{K,L}) = \mathfrak{B}(H_{K,L}, R^L, \bar{R}^L).$$

В дальнейшем будет удобно отождествлять $H_{K,L}$ с конусом K^* (это возможно, так как L — воспроизводящий конус).

Подмножество U конуса K^* (или, что то же самое, конуса $H_{K,L}$) называется *L-нормальным*, если $U = (\overline{U - L^*}) \cap K^*$ (здесь черта означает замыкание в $\sigma(V', V)$).

Справедливо следующее

Предложение 2.2. *Подмножество U конуса K^* входит в $\mathfrak{B}(H_{K,L})$ в том и только в том случае, если оно ограничено (в $\sigma(V', V)$), выпукло и L-нормально.*

Доказательство. (1). Пусть U — слабо ограниченное выпуклое L-нормальное подмножество конуса K^* и элемент h' из конуса K^* не входит в U. Так как $U = (\overline{U - L^*}) \cap K^*$ и $h' \in K^*$, то $h' \overline{\in} \overline{U - L^*}$ и потому найдется элемент $v \in V$ такой, что

$$h'(v) > \sup_{h \in \overline{U - L^*}} h(v). \tag{2.1}$$

Так как $K \supset L$, то $K^* \subset L^*$. Отсюда следует, в частности, что $0 \in U$, поэтому $\overline{U - L^*} \supset U - L^* \supset -L^*$. Из (2.1) следует, что функционал v ограничен снизу на конусе L^* и, стало быть, $v \in L^{**} = L$. Снова используя (2.1), получим, что $h'(v) > \sup\limits_{h \in U} h(v)$. Отметим, что из слабой ограниченности множества U следует его ограниченность в структуре R^L. Применяя предложение 1.3, убедимся в том, что $U \in \mathfrak{B}(H_{K,L})$.

(2). Пусть теперь $U \in \mathfrak{B}(H_{K,L})$. Наряду с функционалом $p_U = \sup U$ (определенным на L), рассмотрим функционал $\tilde{p}: V \to (-\infty, +\infty]$, определенный формулой

$$\tilde{p}(v) = \begin{cases} p_U(v) & v \in L \\ +\infty & v \in v \setminus L. \end{cases}$$

Покажем, что множество $\overline{U - L^*}$ совпадает с совокупностью $U_{\tilde{p}}$ всех функционалов из V', опорных к $\tilde{p}$ как к элементу множества $P(V', X_V, \bar{R}^V)$. В самом деле, множество $\overline{U-L^*}$ выпукло и замкнуто, кроме того $\sup_{h\in\overline{U-L^*}} h(v)=\tilde{p}(v)$, откуда и следует наше утверждение. Заметим теперь, что $U=U_{p_U}=U_{\tilde{p}}\cap K^*$. Таким образом, $U=(\overline{U-L^*})\cap K^*$ и, стало быть, U является L-нормальным.

Покажем, что U слабо ограничено. Действительно, пусть для некоторого $v\in V$ выполняется $\sup_{h\in U} h(v)=+\infty$. Так как L — воспроизводящий конус, то найдется элемент $v_1\in L$ такой, что $v-v_1\in L$. Так как $K\supset L$, то $U\subset K^*\subset L^*$. Поэтому $p_U(v_1)=\sup_{h\in U} h(v_1)\geqslant\sup_{h\in U} h(v)=+\infty$, что невозможно, ибо $p\in P(H_{K,L}, R^L)$. Предложение доказано.

Нетрудно проверить, что $H_{K,L}$-выпуклая оболочка выпуклого множества $U\subset H_{K,L}$ описывается формулой $\mathrm{co}_{H_{K,L}}(U)=(\overline{U-L^*})\cap K^*$. Таким образом, $\mathfrak{B}(H_{K,L})$ является полулинейным пространством относительно бинарной операции $\otimes: (U_1, U_2)\to(\overline{U_1+U_2-L^*})\cap K^*$ и естественным образом определенной операции умножения на положительное число. Пусть в пространстве V введено отношение предпорядка с помощью конуса K ($v_1\geqslant v_2$, если $v_1-v_2\in K$; $v_1, v_2\in V$). Будем говорить, что *сублинейный функционал* p, определенный на L, *допускает монотонное распространение*, если найдется сублинейный функционал $\tilde{p}: V\to R$ такой, что

$$\tilde{p}(v)=p(v)\quad (v\in L);$$

$$\tilde{p}(v_1)\geqslant\tilde{p}(v_2)\quad (v_1, v_2\in V;\ v_1\geqslant v_2).$$

(При этом $\tilde{p}$ называется монотонным распространением p). Имеет место

Предложение 2.3. *Функционал p входит в $P(H_{K,L})$ в том и только в том случае, если он сублинеен и допускает монотонное распространение.*

Доказательство. (1). Пусть $p\in P(H_{K,L})$. Тогда множество U_p слабо ограничено и лежит в K^*. Функционал $\tilde{p}: v\to\sup_{h\in U_p} h(v)$ $(v\in V)$ является монотонным распространением p.

(2). Пусть p допускает монотонное распространение $\tilde{p}$. Множество $U_{\tilde{p}}$ всех опорных к $\tilde{p}$ выпукло, замкнуто и ограничено (см. пример 2.2). Пусть $v \in K$. Тогда $\tilde{p}(-v) \leqslant 0$ и потому $-\tilde{p}(-v) = -\sup\limits_{h \in U_{\tilde{p}}}(-v) = \inf\limits_{h \in U_{\tilde{p}}} h(v) \geqslant 0$. Итак, для всех $h \in U_{\tilde{p}}$ и $v \in K$ выполняется неравенство $h(v) \geqslant 0$. Это означает, что $U_{\tilde{p}} \subset K^*$. Поскольку $p(v) = \tilde{p}(v) = \sup\{h(v) : h \in U_{\tilde{p}}\}$ для $v \in L$, то $p \in P(H_{K, L})$. Предложение доказано.

В заключение остановимся на собственно выпуклых функциях.

Пример 2.6. Пусть V — л. в. п., $Y = \bar{R}^V$. Через H обозначим пространство $A(V)$ всех аффинных на V функций. (В дальнейшем мы отождествляем $A(V)$ с пространством $V' \times R$.) В этой ситуации множество $P(H) = P(H, X_V, Y)$ совпадает с совокупностью всех выпуклых на V функций (это следует из теоремы Хермандера); кроме того, $P(H)$ является полной структурой.

Чтобы описать $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{B}(H, X_V, Y)$, применим конструкцию, рассмотренную в пункте 1^0 Введения.

Пусть f выпуклая функция, $f \neq +\infty$, $f \neq -\infty$, и p сублинейный функционал, определенный в пространстве $V \times R$ и такой, что $\operatorname{dom} p \subset V \times R$, $\operatorname{dom} \not\subset V \times \{0\}$, причем $p(v, 1) = f(v)$ для всех $v \in V$. (Существование этого функционала гарантирует предложение 1.4 из Введения.) Функционал $h = (l, \nu) \in V' \times R$ опорен к p в том и только в том случае, если он (точнее, определяемый им аффинный функционал) опорен к f, так что множество U_p совпадает с U_f. Поскольку $\operatorname{dom} p \subset L = V \times R_+$, то (предложение 2.1) множество U_p является $(-L^*)$-устойчивым. Учитывая, что L — полупространство, нетрудно проверить равенство $-L^* = \{0\} \times R_+$ (мы считаем здесь, что функционал $(l, \nu) \in V' \times R$ действует на элемент $(v, \lambda) \in V \times R$ по формуле $(l, \nu)(v, \mu) = l(v) - \nu\mu$). Итак, множество $U_p = U_f$ является $(\{0\} \times R_+)$-устойчивым (или, по терминологии Введения, просто R_+-устойчивым). Таким же образом из соотношения $\operatorname{dom} p \not\subset V \times \{0\}$ следует, что U_p не является цилиндрическим. Если $f = +\infty$ (соответственно, $f = -\infty$), то множество $U_f = H$ (соответственно, $U_f = \varnothing$) также R_+-устойчиво и нецилиндрическое.

Мы показали, таким образом, H-выпуклое множество R_+-устойчиво, не является цилиндрическим (и, кроме того, выпукло и замкнуто). Нетрудно проверить, что верно и обратное утверждение. Итак, справедливо следующее

Предложение 2.4. *Множество U в пространстве $A(V)=V'\times R$ является опорным к выпуклой функции в том и только в том случае, если оно выпукло, замкнуто, R_+-устойчиво и не является цилиндрическим.*

Замечание. Пусть f — выпуклая функция на V. Предложение 2.4 показывает, что множество U_f является надграфиком некоторой выпуклой функции f^*, определенной на V'. При этом для $h\in V'$ имеют место равенства

$$f^*(h)=\inf\{\lambda:(h,\lambda)\in U_f\}=\sup_{v\in U}(h(v)-f(v)).$$

Функция f^* называется *сопряженной к* f. Сопряженные функции играют важную роль в выпуклом анализе. Некоторые их свойства (в общем случае H-выпуклых функций) рассмотрены в пункте 5° этой главы.

3°. Дальнейшие примеры H-выпуклых функций. Здесь будет продолжено знакомство с некоторыми классами H-выпуклых функций и их простейшими свойствами. При этом (в отличие от предыдущего пункта) соответствующие классы H-выпуклых множеств рассматриваться не будут.

Пример 3.1. Пусть ξ — выпуклое множество в л. в. п. V. Через A_ξ обозначим множество следов на ξ аффинных на V функций. Как вытекает из теоремы Хермандера, множество $P(A_\xi, X_\xi, \bar{R}^\xi)$ состоит из всех выпуклых на ξ функций.

Пример 3.2. Пусть ξ некоторое (необязательно выпуклое) подмножество пространства V; через A_ξ обозначим совокупность следов на ξ аффинных на V функций. Элементы множества $P(A_\xi, X_\xi, \bar{R}_\xi)$ естественно называть выпуклыми на ξ функциями. В самом деле, каждая A_ξ-выпуклая функция допускает распространение до выпуклой функции, определенной на V.

Пример 3.3. Рассмотрим один частный случай предыдущего примера. Пусть N — множество натуральных чисел. В этом случае A_N состоит из всех арифметических прогрессий, $P(A_N, X_N, \bar{R}^N)$ — из всех выпуклых последовательностей (напомним, что числовая последовательность (x_n) называется выпуклой, если $x_n-2x_{n+1}+x_{n+2}\geqslant 0$ при всех n).

Пример 3.4. Рассмотрим теперь отрезок $[a, b]$, и пусть точки $x_i (i=0, 1, \ldots, n+1)$ таковы, что $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}=b$. Через H_p обозначим совокупность непрерывных функций, аффинных на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}] (i=0, 1, \ldots, n)$ (ломанных). Множество $P(H_p, C([a, b]), \tilde{R}^{[a, b]})$ представляет из себя совокупность непрерывных «кусочно-выпуклых» функций (если $f \in P(H_p)$, то сужение f на каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ выпукло).

Пример 3.5. Если H — конус в пространстве $C([a, b])$ (где $a>0$), состоящий из трехчленов $x \to kx^2+lx+m$ (где $k \leqslant 0$, $l \leqslant 0$, $m \leqslant 0$), то $P(H, C([a, b]), \tilde{R}^{[a, b]}) = C([a, b])$ (это равенство доказано, по-существу, в пункте 3° Введения).

Пример 3.6. Рассмотрим снова пространство $C([a, b])$ и через $\hat{C}([a, b])$ обозначим K-пополнение (см. Приложение I) этого пространства. Через Y обозначим полную структуру, полученную путем добавления к $\hat{C}([a, b])$ наибольшего и наименьшего элементов. Пусть $C_{\text{per}} = \{f \in C([a, b]) : f(a)=f(b)\}$. Тогда $P(C_{\text{per}}, C([a, b]), \tilde{R}^{[a, b]}) = C_{\text{per}}$ и $P(C_{\text{per}}, \hat{C}([a, b]), Y) = \hat{C}([a, b])$. (Последние равенства были фактически установлены в пункте 3° Введения.)

Пусть Y полная структура, X множество в Y и $H \subset X$. В X, вообще говоря, существуют подмножества H', отличные от H и такие, что $P(H', X, Y) = P(H, X, Y)$. Например, $P(H) = P(H, X, Y) = P(P(H), X, Y)$. Представляет интерес среди множеств H', обладающих указанным свойством, выбрать наименьшее (по включению). Отметим, что эта задача может и не иметь решения. Рассмотрим в условиях примера 3.5 множество H, состоящее из трехчленов $x \to kx^2+lx+m$, где $l \geqslant 0$, $m \leqslant 0$, а $k \in \{k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots\}$, где (k_n) — убывающая последовательность, стремящаяся к $-\infty$. Нетрудно проверить, рассуждая так же, как в пункте 3° Введения, что $P(H, C([a, b]), \tilde{R}^{[a, b]}) = C([a, b])$. Отсюда следует, что не найдется наименьшего по включению множества H' такого, что $P(H', C([a, b]), \tilde{R}^{[a, b]}) = C([a, b])$. Тем не менее, в некоторых случаях наименьшее множество H' существует. Ниже приводятся соответствующие примеры.

Пример 3.7. Пусть P — совокупность всех сублинейных функционалов, определенных на локально выпуклом пространстве V. Покажем, что наименьшее по включению подмножество H пространства $\bar{R}^V$, для которого $P=P(H)=P(H, X_V, \bar{R}^V)$, совпадает с V'.

Заметим, что $P(V')=P$ (пример 2.1). Пусть $H'\subset\bar{R}^V$, $P(H')=P$. Так как $V'\subset P$, то для любого $h\in V'$ найдется $h'\in H'$ такой, что $h'\leqslant h$. Так как $H'\subset P$ и $P(V')=P$, то для данного h' найдется $\bar{h}\in V'$, для которого выполняется неравенство $\bar{h}\leqslant h'$. Если $h'\neq h$, то $\bar{h}<h$, что невозможно, поскольку $\bar{h}$ и h — линейные функционалы. Итак, $h=h'$, т. е. $h\in H'$, что и требовалось. Рассуждая так же, можно проверить, что справедливо

Предложение 3.1. *Пусть Y — полная структура, H — подмножество Y, обладающее тем свойством, что для любого $h\in H$ опорное множество U_h совпадает с $\{h\}$. Пусть далее $H\subset X\subset Y$. Если $H'\subset X$ и $P(H', X, Y)=P(H, X, Y)$, то $H\subset H'$.*

Пример 3.8. Покажем, что множество аффинных функций при некоторых естественных предположениях является «наименьшим» среди всех множеств, порождающих с помощью взятия супремума выпуклые функции. Точнее говоря, докажем

Предложение 3.2. *Пусть Q — (ограниченная) область в R^n с компактной границей ∂Q, звездная относительно некоторой внутренней точки $x_0\in Q$, и H — замкнутое множество в пространстве $C(Q)$. Тогда $P(H)=P(H, C(Q), \bar{R}^Q)$ совпадает с совокупностью всех выпуклых непрерывных на Q функций в том и только в том случае, если H состоит из выпуклых непрерывных функций и при этом содержит все аффинные функции.*

Доказательство. Нуждается в проверке лишь необходимость сформулированных условий.

Установим, прежде всего, следующий факт. Если l — аффинная функция, $\varepsilon>0$, а f — выпуклая непрерывная функция, причем $f(x)\leqslant l(x)$ для всех $x\in Q$ и $l(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$, то

$$\|l-f\|_{C(Q)}\leqslant\frac{\varepsilon d(Q)}{\delta}. \qquad (3.1)$$

Здесь $d(Q)=\max\limits_{x,y\in Q}|x-y|$ и $\delta=\min\limits_{y\in\partial Q}|y-x_0|>0$ (через $|x|$ обозначена евклидова длина вектора $x\in R^n$, т. е. $|x|=\left(x_1^2+\ldots+x_n^2\right)^{1/2}$).

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть Q есть отрезок $[x, y]$. Проведем в R^2 следующие прямые: L_1 — через точки $(y, l(y))$ и $(x_0, l(x_0)-\varepsilon)$ и L_2 — через точки $(x, l(x))$ и $(x_0, l(x_0)-\varepsilon)$. Обозначим через h_i функцию, графиком которой служит $L_i (i=1, 2)$. Очевидно, что f мажорирует функцию $h_1 \wedge h_2$. Следовательно,

$$\|l-f\|_{C(Q)} \leqslant (l(x)-h_1(x)) \vee (l(y)-h_2(y)) = \frac{\varepsilon |x-y|}{|x-x_0| \wedge |y-x_0|}.$$

В общем случае неравенство (3.1) устанавливается путем рассмотрения всевозможных сечений Q прямыми, проходящими через точку x_0.

Перейдем к доказательству необходимости. Так как класс $P(H)$ и класс непрерывных выпуклых на Q функций совпадают, то, в частности, функции из H являются выпуклыми и любая аффинная функция является H-выпуклой. Последнее означает, что для каждого натурального n найдется функция f_n из H такая, что $f_n \leqslant l$; $l(x_0) \leqslant f_n(x_0)+\frac{1}{n}$. Применяя неравенство (3.1), имеем $\|l-f_n\|_{C(Q)} \leqslant \frac{d(Q)}{n\delta}$.

Таким образом, $l=\lim f_n$. Следовательно, из-за замкнутости множества H, функция l входит в H. Предложение доказано полностью.

З а м е ч а н и е. Для произвольного компакта Q предложение 3.2, вообще говоря, не имеет места.

Остановимся на существовании опорного в точке. Введем сначала соответствующее определение. Пусть Q — некоторое множество, $X \subset \bar{R}^Q$, $H \subset X$. Рассмотрим H-выпуклую функцию $p \in P(H, X, \bar{R}^Q)$ и множество U_p опорных к p элементов из H. Будем говорить, что *элемент* $h \in U_p$ *опорен к* p *в точке* $x \in Q$, если $h(x) = p(x)$. Ясно, что опорный в точке элемент может и не найтись. Например, если Q совпадает с л. в. п. V, $H=V'$ и p — сублинейный функционал на V такой, что $p \neq -\infty$ и $\operatorname{dom} p \neq V$, то в точке $x \bar{\in} \operatorname{dom} p$ опорного не существует. Более того, как показывает следующий пример, может не существовать опорного даже в точке из $\operatorname{dom} p$.

Пример 3.9. Функционал p, определенный на R^2 формулой

$$p: x (= (x_1, x_2)) \to \begin{cases} -\sqrt{x_1 x_2} & x \in R_+^2 \\ +\infty & x \bar{\in} R_+^2, \end{cases}$$

не имеет опорного в точках $(\lambda, 0)$ и $(0, \lambda)$ при $\lambda>0$.

Тем не менее в некоторых случаях можно гарантировать существование опорного в точке. Проиллюстрируем это двумя примерами.

Пример 3.10. Имеет место

Предложение 3.3. *Пусть p — сублинейный функционал, определенный на л. в. п. V; конус $K=\operatorname{dom} p$ телесен и p непрерывен на внутренности $\operatorname{int} K$ множества K. Тогда p имеет опорный функционал из $H=V'$ в любой точке $x_0\in\operatorname{int} K$.*

Доказательство. В условиях предложения конус $\operatorname{epi} p$ (надграфик функционала p) телесен, причем $(x_0, p(x_0))\in\operatorname{int}(\operatorname{epi} p)$. По теореме отделимости найдем ненулевой функционал $(h, \nu)\in V'\times R$ такой, что

$$h(x_0)+\nu p(x_0)=0\leqslant h(x)+\nu\mu \quad (x\in K;\ \mu\geqslant p(x)). \quad (3.2)$$

Покажем, что $\nu\neq 0$. Действительно, в противоположном случае $h(x_0)=0$ и $h(x)\geqslant 0$ при $x\in K$, откуда, учитывая, что $x_0\in\operatorname{int} K$, получим $h=0$. Это, однако, невозможно, так как $(h, \nu)\neq 0$. При $x=0$ из правой части (3.2) вытекает неравенство $0\leqslant\nu\mu$ $(\mu\geqslant 0=p(0))$, которое возможно лишь при $\nu\geqslant 0$. Итак, $\nu>0$. Можно считать, что $\nu=1$. В этом случае из правой части (3.2) следует, что $-h(x)\leqslant p(x)$ при всех $x\in K$, т. е. $-h\in U_p$. Кроме того, из (3.2) $-h(x_0)=p(x_0)$. Таким образом, функционал $-h$ опорен к p в точке x_0, что и доказывает предложение.

Пример 3.11. Пусть H — конус в пространстве $C([a, b])$, состоящий из трехчленов $h: x\to -kx^2+lx+m$, где $k\in R_+$; $l, m\in R$. Покажем, что каждая дважды непрерывно дифференцируемая функция f имеет в любой точке $x_0\in[a, b]$ опорный элемент h. В самом деле, трехчлен $h: x\to -kx^2+lx+m$ будет опорным к f в точке x_0, если он удовлетворяет следующей системе: $f(x_0)-h(x_0)=0$; $f'(x_0)-h'(x_0)=0$; $f''(x)-h''(x)\geqslant 0$ $(x\in[a, b])$ или, то же самое, соотношениям

$$-kx_0^2+lx_0+m=f(x_0);$$
$$-2kx_0+l=f'(x_0);$$
$$2k\geqslant -f''(x) \text{ при } x\in[a, b].$$

Выписанная система разрешима, откуда и следует наше утверждение.

Попутно отметим, что тем самым для f имеет место следующее, используемое в дальнейшем, представление

$$f(x) = \max_{a \leqslant y \leqslant b} [-k(x-y)^2 + f'(y)(x-y) + f(y)],$$

где $k \geqslant 0 \vee \max\limits_{a \leqslant y \leqslant b} \left[-\frac{1}{2} f''(y)\right]$. Впрочем, последнюю формулу нетрудно получить и непосредственно.

4⁰. Пространство H-выпуклых множеств. Пусть Y — полная структура, X — подмножество Y, являющееся K-полулинеалом с сокращением (если $x+z=y+z$, то $x=y$ $(x, y, z \in X)$). Пусть H — полулинейное подпространство в X. В этом случае $P(H) = P(H, X, Y)$ также является полулинейным пространством с сокращением. Поскольку $P(H)$ и $\mathfrak{B}(H)$ алгебраически изоморфны, то и $\mathfrak{B}(H)$ — полулинейное пространство с сокращением. Это обстоятельство позволяет, используя обычную конструкцию, которая применяется для погружения полугруппы с сокращением в группу (см., например, [163]), построить векторное пространство $[\mathfrak{B}(H)]$ (соответственно, $[P(H)]$), в котором $\mathfrak{B}(H)$ (соответственно, $P(H)$) является с точностью до изоморфизма воспроизводящим конусом. При этом двойственность Минковского распространяется до изоморфизма между $[P(H)]$ и $[\mathfrak{B}(H)]$. Пространство $[\mathfrak{B}(H)]$ (и изоморфное ему $[P(H)]$) называется *пространством H-выпуклых множеств*.

Проиллюстрируем высказанные утверждения на одном типичном и важном примере.

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $Y = \bar{R}^V$, $X = R^V$, $H = V'$. В этом случае (см. пример 2.2) $P(H, R^V)$ состоит из всех непрерывных сублинейных функционалов, определенных на V, а $\mathfrak{B}(H, R^V)$ — из всех непустых выпуклых замкнутых и ограниченных (в $\sigma(V', V)$) подмножеств пространства V'. Как было показано в примере 2.3, $P(H, R^V) = P(H, C(V))$, а $\mathfrak{B}(H, R^V) = \mathfrak{B}(H, C(V))$, т. е. каждый функционал из $P(H) = P(H, R^V)$ непрерывен (или, что то же самое, ограничен), каждое множество из $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{B}(H, R^V)$ ограничено по норме (и, стало быть, компактно в $\sigma(V', V)$).

Перейдем к построению пространства выпуклых множеств $[\mathfrak{B}(H)]$. С этой целью рассмотрим множество $[\mathfrak{B}(H)] = \mathfrak{B}(H) \times \mathfrak{B}(H)$ и введем в нем операции умножения на вещественное число и сложение, положив

$$\lambda(U_1, U_2)=\begin{cases}(\lambda U_1, \lambda U_2), \text{ если } \lambda\geqslant 0\\ (-\lambda U_2, -\lambda U_1), \text{ если } \lambda\leqslant 0;\end{cases}$$

$$((U_1, U_2)\in[\tilde{\mathfrak{B}}(H)],\ \lambda\in R);$$

$$(U_1, U_2)+(U_1', U_2')=(U_1+U_2', U_2+U_1');$$

$$((U_1, U_2),\quad (U_1', U_2')\in[\tilde{\mathfrak{B}}(H)]).$$

Замечание. В рассматриваемом случае сумма Минковского H-выпуклых множеств совпадает с их алгебраической суммой. В общем случае операция сложения в $[\tilde{\mathfrak{B}}(H)]$ определяется с помощью суммы Минковского.

Введем в $[\tilde{\mathfrak{B}}(H)]$ отношения предпорядка $\geqslant$ и эквивалентности $\sim$, положив

$$\begin{aligned}&(U_1, U_2)\geqslant(U_1', U_2')\Leftrightarrow U_1+U_2'\supset U_2+U_1';\\ &(U_1, U_2)\sim(U_1', U_2')\Leftrightarrow U_1+U_2'=U_2+U_1'.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Искомое пространство выпуклых множеств $[\mathfrak{B}(H)]$ определим как фактор-пространство $[\tilde{\mathfrak{B}}(H)]$ по отношению эквивалентности $\sim$. Чтобы оправдать это определение, покажем, что $[\mathfrak{B}(H)]$ содержит воспроизводящий конус, изоморфный $\mathfrak{B}(H)$. Условимся символом $\overline{(U_1, U_2)}$ обозначать элемент пространства $[\mathfrak{B}(H)]$, содержащий пару (U_1, U_2). Совокупность всех элементов вида $\overline{(U, \{0\})}$ обозначим через $[\mathfrak{B}(H)]\hat{}$. Множество $[\mathfrak{B}(H)]\hat{}$ и является искомым конусом. В самом деле, отображение $U\to\overline{(U, \{0\})}$ является изоморфизмом между $\mathfrak{B}(H)$ и $[\mathfrak{B}(H)]\hat{}$. Кроме того, $[\mathfrak{B}(H)]\hat{}-[\mathfrak{B}(H)]\hat{}=[\mathfrak{B}(H)]$.

С помощью той же конструкции можно построить пространство $[P(H)]$, в котором $P(H)$ является (с точностью до изоморфизма) воспроизводящим конусом. Из теоремы Минковского — Фенхеля следует, что отображение $\tilde{\varphi}:[P(H)]\to[\mathfrak{B}(H)]$, определенное формулой

$$\varphi:\overline{(p_1, p_2)}\to\overline{(U_{p_1}, U_{p_2})},$$

является изоморфизмом векторных пространств $[P(H)]$ и $[\mathfrak{B}(H)]$ (здесь $\overline{(p_1, p_2)}$ элемент пространства $[P(H)]$, содержащий пару (p_1, p_2)).

Непосредственно из определения пространства $[P(H)]$ вытекает, что его можно отождествлять с векторным подпространством $P(H)-P(H)$ пространства $C(V)$. Оно состоит из всех функционалов, определенных на V и представимых в виде разности двух непрерывных сублинейных. При этом элемент $\overline{(p_1, p_2)}$ отождествляется с разностью p_1-p_2. Учитывая это отождествление, можно сказать, что отображение

$$\psi:\overline{(U_{p_1}, U_{p_2})}\to p_1-p_2 \tag{4.2}$$

является изоморфизмом векторных пространств $[\mathfrak{B}(H)]$ и $[P(H)]$.

С помощью соотношения (4.1) в $[\mathfrak{B}(H)]$ естественным образом вводится отношение порядка. Это отношение согласовано с векторной структурой и порождается конусом $K_{\mathfrak{B}}=\{\overline{(U_1, U_2)}\in[\mathfrak{B}(H)]:\ U_1\supset U_2\}$. В $[P(H)]$ вводится отношение порядка, индуцированное из $C(V)$; заметим, что это отношение порождается конусом $\{s\in[P(H)]:s(x)\geqslant 0$ для всех $x\in V\}$, который является образом $K_{\mathfrak{B}}$ при отображении ψ. Отношение порядка, индуцируемое в K-полулинеале $\mathfrak{B}(H)$ (соответственно, $P(H)$) из пространства $[\mathfrak{B}(H)]$ (соответственно, $[P(H)]$), совпадает с имеющимся в $\mathfrak{B}(H)$ (соответственно, в $P(H)$) отношением порядка. Это позволяет показать, что $[\mathfrak{B}(H)]$ и $[P(H)]$ являются K-линеалами. При этом используется то обстоятельство, что $\mathfrak{B}(H)$ и $P(H)$ суть K-полулинеалы, и следующее

Предложение 4.1. *Пусть Z — упорядоченное векторное пространство, причем любые два элемента некоторого воспроизводящего конуса L в Z имеют верхнюю грань. Тогда Z является K-линеалом.*

Для доказательства предложения достаточно заметить, что для любых двух элементов $x, y\in Z$ существует верхняя грань (если $x=x_1-x_2$, $y=y_1-y_2$ (x_1, x_2; y_1, $y_2\in L$), то $x\vee y=[(x_1+y_2)\vee(y_1+x_2)]-x_2-y_2$).

Покажем, что $[\mathfrak{B}(H)]$ и $[P(H)]$ суть K-линеалы ограниченных элементов. Действительно, в качестве единицы в K-линеале $[P(H)]$ можно взять сублинейный функционал $\|\cdot\|$, при этом каждый элемент из $[P(H)]$ ограничен; единицей в $[\mathfrak{B}(H)]$ является элемент $\overline{(S,\{0\})}$, где S — единичный шар пространства V' (этот элемент отвечает функционалу $\|\cdot\|$ при изоморфизме ψ, определенном формулой (4.2)).

Введем в K-линеалах ограниченных элементов $[P(H)]$ и $[\mathfrak{V}(H)]$ стандартным способом норму (см. Приложение I). Эта норма полностью определяется упорядочением, поэтому порядковый изоморфизм пространств $[P(H)]$ и $[\mathfrak{V}(H)]$ влечет их топологический изоморфизм (точнее говоря, изометрию). Таким образом, $[P(H)]$ и $[\mathfrak{V}(H)]$ можно рассматривать как разные реализации одного и того же упорядоченного нормированного пространства. В связи с этим условимся не различать эти пространства и обозначать их одним символом $[\mathfrak{V}(H)]$. При рассмотрении пространства выпуклых множеств одним символом будут обозначены сублинейный функционал и отвечающее ему по двойственности Минковского опорное множество; одним символом будут обозначены разность сублинейных функционалов и соответствующий класс пар множеств.

Так как пространство $[\mathfrak{V}(H)]$ является архимедовым K-линеалом ограниченных элементов, то по теореме Крейнов — Какутани (см. Приложение I) найдется компакт Q такой, что пополнение $[\mathfrak{V}(H)]$ изометрично пространству $C(Q)$ всех непрерывных на Q функций. Компакт Q описывается особенно просто в случае, если V евклидово пространство. Остановимся на этом (наиболее интересном для нас случае) более подробно. Итак, пусть R^n есть n-мерное евклидово пространство (т. е. числовое пространство R^n с евклидовой нормой $|\cdot|$). Единичную сферу этого пространства называют *сферой направлений* и обозначают через Z_n. Из теоремы Стоуна — Вейерштрасса следует, что в рассматриваемой ситуации компакт Q, о котором шла речь выше, совпадает со сферой Z_n. Таким образом, $[\mathfrak{V}(H)]$ реализуется как плотное подпространство в $C(Z_n)$. Эта реализация заключается в том, что каждый элемент (являющийся положительно однородным функционалом) отождествляется со своим следом на сферу Z_n. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть это отождествление, элемент $[\mathfrak{V}(H)]$ и его след на Z_n будут обозначаться одной буквой; конус $\mathfrak{V}(H)=\mathfrak{V}(R^n)$ — выражаться через $\mathfrak{V}_n$, а пространство $[\mathfrak{V}(H)]$ — через $[\mathfrak{V}_n]$.

Отметим, что равенство $[\bar{\mathfrak{V}}_n]=C(Z_n)$ содержит известный в геометрии факт, что любая непрерывная на единичной сфере функция может быть равномерно приближена линейными комбинациями следов опорных функций на множество Z_n [25].

Это же равенство позволяет выписать общий вид линейного функционала в нормированном пространстве $[\mathfrak{B}_n]$. В самом деле, $[\mathfrak{B}_n]'$ совпадает с $C'(Z_n)=[C(Z_n)]'$, т. е. по теореме Рисса — Маркова с точностью до изометрии есть пространство (регулярных) борелевских мер на сфере Z_n. Таким образом, ограничение линейного функционала над $[\mathfrak{B}_n]$ на $\mathfrak{B}_n$, т. е. *линейный по Минковскому функционал* F над выпуклыми компактами, имеет вид

$$F(\mathfrak{X})=\int\limits_{Z_n}\mathfrak{x}(\cdot)\,d\mu \qquad (\mathfrak{X}\in\mathfrak{B}_n),$$

где μ — некоторая мера на Z_n.

Покажем, наконец, что равенство $\overline{[\mathfrak{B}_n]}=C(Z_n)$ позволяет привести простое доказательство (основанное на теореме Арцела — Асколи) известной теоремы выбора Бляшке.

Предварительно отметим, что для ограниченного сублинейного функционала p, определенного на нормированном пространстве V, справедливо соотношение

$$|p(x)-p(y)|\leqslant\|p\|\|x-y\| \quad (x,\ y\in V)$$

$\left(\text{здесь } \|p\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|p(x)|\right)$.

Доказательство приведенного соотношения следует из неравенств

$$p(x)\leqslant p(x-y)+p(y);\ p(y)\leqslant p(y-x)+p(x).$$

Теорема Бляшке. *Конус $\mathfrak{B}_n$ локально компактен.*

Доказательство. Пусть $\Omega\subset\mathfrak{B}_n$ и $\sup\limits_{p\in\Omega}\|p\|=C<+\infty$. Если $x_1,\ x_2\in Z_n$, то для $p\in\Omega$ имеем

$$|p(x_1)-p(x_2)|\leqslant\|p\|\|x_1-x_2\|\leqslant C\|x_1-x_2\|,$$

откуда следует равностепенная непрерывность множества Ω. Для завершения доказательства достаточно сослаться на теорему Арцела — Асколи.

5°. Сопряженные функции (схема Фенхеля—Моро). В примере 2.6 было отмечено, что множество всех опорных к выпуклой функции f, определенной в локально выпуклом пространстве V, можно рассматривать как надграфик сопряженной к f функции f^* (которая определена в V'). Теория сопряженных выпуклых функций, разработанная Фенхелем и Моро и развитая Рокфеллером и др., играет важную роль в выпуклом анализе. Оказывается, что многие результаты этой теории имеют в своей основе H-выпуклость.

Пусть Q и H — некоторые множества. На прямом произведении $Q \times H$ определим конечную функцию $(x, h) \to \langle x, h \rangle$. Считаем, простоты ради, что для любых $x_1, x_2 \in Q$ найдется $h \in H$ такое, что $\langle x_1, h \rangle \neq \langle x_2, h \rangle$; для любых $h_1, h_2 \in H$ найдется $x \in Q$ такое, что $\langle x, h \rangle \neq \neq \langle x, h_2 \rangle$. (В дальнейшем излагаемые результаты, в которых не использовано это предположение, будут употребляться без дополнительных оговорок). При фиксированном $h \in H$ функция $\hat{h} : x \to \langle x, h \rangle$ входит в R^Q. При этом если $h_1 \neq h_2$, то $\hat{h}_1 \neq \hat{h}_2$. В дальнейшем отождествляются элемент $\hat{h}$ и функция $\hat{h}$ и обозначаются одной буквой h; тем самым считается, что H вложено в R^Q. Таким же образом Q можно рассматривать, как подмножество R^H. (Подобное отождествление уже рассматривалось в пункте 1° при изучении множеств, выпуклых по Фаню.)

Напомним, что через X_Q обозначается K-полулинеал, состоящий из всех функций $f: Q \to (-\infty, +\infty]$ и функции $-\infty$. Условимся, что символом $L \odot \mathbf{1}$ будет обозначена алгебраическая сумма в R^Q множества L, содержащегося в R^Q, и прямой $(\lambda \mathbf{1})_{\lambda \in R}$ (как обычно, $\mathbf{1} : x \to 1$ $(x \in Q)$).

Перейдем к определению сопряженных функций. Пусть $f \in X_Q$. Функция f^*, определенная на H формулой

$$f^* : h \to \sup_{x \in Q} (h(x) - f(x)) \qquad \left(= \sup_{x \in Q} (\langle x, h \rangle - f(x))\right),$$

называется *сопряженной* (точнее, H-сопряженной) к f функцией или *H-преобразованием Юнга* функции f.

Непосредственно из определения вытекает, что $f^* \in X_H$. Кроме того, для $h \in H$ и $x \in Q$ имеет место *неравенство Юнга*

$$f^*(h) \geqslant h(x) - f(x). \tag{5.1}$$

Справедливо

Предложение 5.1. *Для любой* $f \in X_Q$ *функция* f^* *является* $Q \odot \mathbf{1}$*-выпуклой* (*т. е.* $f^* \in P(Q \odot \mathbf{1}, X_H, \bar{R}_H)$).

Доказательство. Для любого $x \in \operatorname{dom} f$ рассмотрим функцию $y_x : H \to R$, определенную равенством $y_x = x - f(x)\mathbf{1}$. Совокупность всех функций y_x, где $x \in \operatorname{dom} f$, обозначим через U. Ясно, что $U \subset Q \odot \mathbf{1}$. Для $h \in H$ имеем

$$f^*(h) = \sup_{x \in Q} (h(x) - f(x)) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} (\langle x, h \rangle - f(x)) =$$

$$= \sup_{x \in \operatorname{dom} f} (x - f(x)\mathbf{1})(h) = \sup_{y_x \in U} y_x(h).$$

Предложение доказано.

Предложение 5.2. *Если* $f_1 \geqslant f_2$, *то* $f_1^* \leqslant f_2^*$.

Доказательство. Очевидно.

Так как $f^* \in X_H$, то имеет смысл говорить о Q-сопряженной к f^* функции $f^{**} = (f^*)^*$. Из определения сопряженной функции следует $f^{**}(x) = \sup_{h \in H} (x(h) - f^*(h))$ $\left(= \sup_{h \in H} (\langle x, h \rangle - f^*(h)\right)$.

Функцию f^{**} будем называть *второй сопряженной к* f.

Предложение 5.3. *Имеет место неравенство* $f \geqslant f^{**}$.

Доказательство. В силу (5.1) $f(x) \geqslant \langle x, h \rangle - f^*(h)$, а потому

$$f(x) \geqslant \sup_{h \in H} (\langle x, h \rangle - f^*(h)) = f^{**}(x).$$

Теорема Фенхеля — Моро. *Функция* f *из* X_Q *является* $H \odot \mathbf{1}$*-выпуклой в том и только в том случае, если* $f = f^{**}$.

Доказательство. Если $f = f^{**}$, то на основе предложения 5.1 f является $H \odot \mathbf{1}$-выпуклой. Предположим теперь, что f $H \odot \mathbf{1}$-выпукла. Тогда найдется подмножество U множества $H \odot \mathbf{1}$ такое, что $f = \sup_{g \in U} g$. Пусть $g \in U$, $g = h + \alpha\mathbf{1}$. Тогда $f \geqslant h + \alpha\mathbf{1}$ и потому $f^*(h) = \sup(\langle x, h \rangle - f(x)) \leqslant -\alpha$, откуда следует, что $f^{**}(x) \geqslant h(x) - f^*(h) \geqslant h(x) + \alpha = g(x)$. Таким образом, $f^{**} \geqslant \sup_{g \in U} g$, т. е. $f^{**} \geqslant f$. Обратное неравенство вытекает из (5.1). Теорема доказана.

Пусть $f \in X_Q$ и $U_f = \{g \in H \odot 1 : g \leqslant f\}$. Введем в рассмотрение функцию $\mathrm{co}_{H\odot 1} f : x \to \sup\limits_{g \in U_f} g(x)$. Функция $\mathrm{co}_{H\odot 1} f$ является $H \odot 1$-выпуклой. Более того, $\mathrm{co}_{H\odot 1} f$ — наибольшая $H \odot 1$-выпуклая функция, минорирующая f. Отсюда следует, в частности, что равенство $f = \mathrm{co}_{H\odot 1} f$ справедливо в том и только в том случае, если функция f является $H \odot 1$-выпуклой.

Предложение 5.4. *Для любой функции $f \in X_Q$ выполняется равенство $f^{**} = \mathrm{co}_{H\odot 1} f$.*

Доказательство. На основе предложений 5.1 и 5.3 функция f^{**} является $H \odot 1$-выпуклой и удовлетворяет неравенству $f^{**} \leqslant f$; поэтому $f^{**} \leqslant \mathrm{co}_{H\odot 1} f$. Из неравенства $f \geqslant \mathrm{co}_{H\odot 1} f$ получим, применяя предложение 5.2 и теорему Фенхеля — Моро, что $f^{**} \geqslant \mathrm{co}_{H\odot 1} f$. Предложение доказано.

Предложение 5.5. *Пусть $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ семейство функций из X_Q. Если $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma \in X_Q$, то*

$$\left(\inf_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma\right)^* = \sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma^*;$$

кроме того,

$$\left(\sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma\right)^* \leqslant \mathrm{co}_{Q\odot 1}\left(\inf_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma^*\right).$$

(Здесь грани вычисляются в структурах $\bar{R}^Q$ и $\bar{R}^H$).

Доказательство. Пусть $h \in H$. Тогда

$$\left(\inf_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma\right)^*(h) = \sup_{x \in Q}\left(h(x) - \inf_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)\right) =$$

$$= \sup_{x \in Q}\left(h(x) + \sup_{\gamma \in \Gamma}(-f_\gamma(x)\right) =$$

$$= \sup_{x \in Q}\sup_{\gamma \in \Gamma}(h(x) - f_\gamma(x)) = \sup_{\gamma \in \Gamma}\sup_{x \in Q}(h(x) - f_\gamma(x)) =$$

$$= \sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma^*(h).$$

Отсюда и следует первая часть утверждения. Для доказательства второй части заметим, что $\sup f_\gamma \geqslant f_{\gamma_0}$ для $\gamma_0 \in \Gamma$, откуда (предложение 5.2) $f_{\gamma_0}^* \geqslant \left(\sup\limits_\gamma f_\gamma\right)^*$, т. е. $\inf\limits_\gamma f_\gamma^* \geqslant \left(\sup\limits_\gamma f_\gamma\right)^*$. Используя предложения 5.1, 5.3, 5.4 и теорему Фенхеля — Моро, получим, что $\mathrm{co}_{Q\odot 1} \inf\limits_\gamma f_\gamma^* \geqslant$ $\geqslant \left(\sup\limits_\gamma f_\gamma\right)^*$. Предложение доказано.

В теории сопряженных выпуклых функций важное значение имеет понятие конволюции (свертки) двух функций. Это объясняется, в частности, тем, что именно с помощью конволюции удается описать сопряженную к сумме двух функций. Заметим, что конволюция двух выпуклых функций имеет простой геометрический смысл: она совпадает с функцией, надграфик которой порожден суммой надграфиков исходных функций.

Перейдем к определению конволюции в рассматриваемой ситуации. Будем считать, что H — конус в R^q. Рассмотрим Q как подмножество пространства R^H и через $\mathrm{Co}(Q)$ обозначим коническую оболочку Q в R^H. (Если Q — конус и H состоит из аддитивных и положительно однородных на Q функций, то $\mathrm{Co}(Q)=Q$.) Каждый элемент $h\in H$ порождает функцию $\bar{h}$, определенную на $\mathrm{Co}(Q)$ по формуле $\bar{h}: z\to z(h)$. Функция $\bar{h}$ является распространением на $\mathrm{Co}(Q)$ функции h, определенной на Q; поэтому в дальнейшем функция $\bar{h}$ будет обозначаться тем же символом h, что и порождающий ее элемент. Как следует непосредственно из определения, функция h аддитивна и положительно однородна на $\mathrm{Co}(Q)$.

Пусть $f\in X_Q$. Введем в рассмотрение функцию $\tilde{f}\in X_{\mathrm{Co}(Q)}$, положив для $z\in \mathrm{Co}(Q)$

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\in Q \\ +\infty & z\bar{\in} Q. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что H-сопряженная к $\tilde{f}$ функция $\tilde{f}^*$ совпадает с H-сопряженной к f функцией f^*.

Конволюцией функций f_1 и f_2 из X_Q назовем функцию $f_1\dot{+}f_2$, определенную на Q по формуле

$$f_1\dot{+}f_2 : x\to \inf_{\substack{x_1+x_2=x\\ x_1,x_2\in \mathrm{Co}(Q)}} \left(\tilde{f}_1(x_1)+\tilde{f}_2(x_2)\right).$$

Естественным образом определяется конволюция $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\bullet} f_i = f_1\dot{+}f_2\dot{+}\ldots\dot{+}f_n$ конечного числа функций.

Имеет место

Предложение 5.6. *Если* $f_i\in X_Q$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{\bullet} f_i\right)^* = \sum_{i=1}^{n} f_i^*; \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^* \leqslant \mathrm{co}_{Q\odot 1}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{\bullet} f_i^*\right).$$

Доказательство. (1). $\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{\boldsymbol\cdot} f_i\right)^*(h)=\sup\limits_{x\in Q}\Bigl(h(x)-$

$-\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{\boldsymbol\cdot} f_i\right)(x)\Bigr)=\sup\limits_{x\in Q}\left(h(x)-\inf\limits_{\substack{\sum_{i=1}^{n} x_i=x\\ x_i\in \mathrm{Co}(Q)}}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}_i(x_i)\right)=\sup\limits_{x\in Q}\sup\limits_{\substack{\sum_{i=1}^{n} x_i=x\\ x_i\in \mathrm{Co}(Q)}}$

$\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-\widetilde{f}_i(x_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}_i^*(h)=\sum_{i=1}^{n}f_i^*(h).$

(2). $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^*=\left(\widetilde{\sum_{i=1}^{n} f_i}\right)^*=\left(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}_i\right)^*\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}_i^{**}\right)^*=\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{\boldsymbol\cdot}\widetilde{f}_i^*\right)^{**}=$

$=\mathrm{co}_{Q\odot 1}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{\boldsymbol\cdot} f_i^*\right).$

Предложение доказано.

Замечание. Если функции f_i ($i=1, 2, \ldots, n$) являются $H\odot 1$-выпуклыми, то, как следует из доказательства, $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^*=\mathrm{co}_{Q\odot 1}\left(\sum_{i=1}^{n}{}^{\boldsymbol\cdot} f_i^*\right)$. Представляет интерес выяснить, в каком случае $Q\odot 1$-выпукла функция $\sum_{i=1}^{n}{}^{\boldsymbol\cdot} f_i$, т. е. когда справедливо равенство $\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^*=$ $=\sum_{i=1}^{n}{}^{\boldsymbol\cdot} f_i^*$. Приведем результат, гарантирующий (при некоторых предположениях топологического характера) справедливость этого равенства для (обычных) выпуклых функций.

Теорема Моро — Рокфеллера. *Пусть f_1 и f_2 — выпуклые функции, определенные в л. в. п. V. Если $\operatorname{dom} f_1\cap\operatorname{dom} f_2\neq\varnothing$ и хотя бы одна из функций f_1, f_2 непрерывна в некоторой точке $x_0\in\operatorname{dom} f_1\cap\operatorname{dom} f_2$, то $(f_1+f_2)^*=f_1^*\dot{+}f_2^*$.*

Доказательство этой теоремы см., например, в [71].

Применим аппарат сопряженных функций для исследования H-выпуклых множеств, т. е. элементов $\mathfrak{B}(H, X_Q, \bar{R}^Q)$.

Пусть $U\subset H$. Для $h\in H$ положим

$$\delta_U(h)=\begin{cases}0 & h\in U\\ +\infty & h\overline{\in} U\end{cases}.$$

Функция δ_U называется *индикаторной функцией* множества U. Для $x \in Q$ имеем

$$\delta_U^*(x) = \sup_{h \in H}(h(x) - \delta_U(h)) =$$

$$= \sup_{x \in \operatorname{dom} \delta_U}(h(x) - \delta_U(h)) = \sup_{h \in U} h(x) = (\sup U)(x) = p_U(x).$$

Таким образом,

$$\delta_U^* = p_U. \tag{5.2}$$

Предложение 1.3 удобно переформулировать в терминах индикаторной функции. Имеет место

Предложение 5.7. *Подмножество U в K-полулинеале X_Q является H-выпуклым в том и только в том случае, если для любого $h' \overline{\in} U$ выполняется* $\delta_U^{**}(h') > 0$

Доказательство. Используя (5.2), имеем для $h' \in H$

$$\delta_U^{**}(h') = \sup_{x \in Q}(h'(x) - \sup_{h \in U} h(x)).$$

Привлекая предложение 1.3, получим требуемое.

Следующая теорема описывает связь между H-выпуклыми множествами и $Q \odot 1$-выпуклыми функциями.

Теорема 5.1. *Подмножество U множества H является H-выпуклым в том и только в том случае, если найдутся функция $f \in P(Q \odot \mathbf{1}, X_H, \bar{R}^H)$ и число c такие, что $U = \{h \in H : f(h) \leqslant c\}$.*

Доказательство. (1). Пусть U есть H-выпуклое множество. Используя предложения 5.3 и 5.7, имеем $\delta_U^{**}(h) > 0$, если $h \overline{\in} U$; $\delta_U^{**}(h) \leqslant 0$, если $h \in U$. Осталось заметить, что функция δ_U^{**} является $Q \odot 1$-выпуклой.

(2). Пусть f является $Q \odot 1$-выпуклой и $U = \{h \in H : f(h) \leqslant c\}$. Существует подмножество V множества $Q \odot 1$ такое, что $f(h) = \sup_{y \in V} h(y)$ $(h \in H)$. Пусть $h' \overline{\in} U$. Для некоторого $y \in V$ (где $y = x + \alpha 1$; $x \in Q$) оказывается $y(h') > c$, т. е. $x(h') > c - \alpha$. Для всех $h \in U$ имеем $x(h) + \alpha \leqslant \sup_{y \in V} h(y) = f(y) \leqslant c$. Для завершения доказательства необходимо сослаться на предложение 1.3.

В заключение приведем несколько примеров использования техники сопряженных функций. При этом будем считать, что множество H уже реализовано как подмножество $\bar{R}^Q$.

Пример 5.1. Пусть h — выпуклая функция на отрезке $Q=[a, b]$. Построим преобразование Юнга по лучу $H=(\alpha h)_{\alpha\geqslant 0}$ для функции $I: x\to x$.

Так как выпуклая функция достигает максимума в граничных точках отрезка, то

$$I^*(\alpha)=I^*(\alpha h)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}(\alpha h(x)-x)=$$

$$=(\alpha h(a)-a)\bigvee(\alpha h(b)-b).$$

Если $h(a)\geqslant h(b)$, то $\alpha h(a)-a\geqslant\alpha h(b)-a\geqslant\alpha h(b)-b$. Следовательно, $I^*(\alpha)=\alpha h(a)-a$, откуда вытекает, что

$$I^{**}(x)=\sup_{\alpha\geqslant 0}(\alpha(h(x)-h(a))+a)=a.$$

Пусть $h(b)>h(a)$. Тогда

$$I^{**}(x)=\sup_{\alpha\geqslant 0}\begin{cases}\alpha(h(x)-h(a))+a, & 0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{b-a}{h(b)-h(a)}\\ \alpha(h(x)-h(b))+b, & \alpha\geqslant\dfrac{b-a}{h(b)-h(a)}\end{cases}.$$

Отсюда следует, что в данном случае

$$I^{**}(x)=a\bigvee\frac{b(h(x)-h(a))-a(h(x)-h(b))}{h(b)-h(a)}. \qquad (5.3)$$

Из полученного соотношения вытекает

Предложение 5.8. *Класс $P(H\odot 1)$ (где $H=(\alpha h)_{\alpha\geqslant 0}$, $h\in R^{[a,b]}$) совпадает с классом выпуклых неубывающих функций в том и только в том случае, если h — аффинная возрастающая функция.*

Доказательство. Сначала h — аффинная возрастающая функция. Тогда $H\odot 1$-выпуклые функции выпуклы и не убывают; с другой стороны, I является $H\odot 1$-выпуклой функцией, следовательно, любая неубывающая выпуклая функция $H\odot 1$-выпукла.

Пусть теперь каждая $H\odot 1$-выпуклая функция является неубывающей выпуклой функцией и, наоборот, каждая неубывающая выпуклая функция $H\odot 1$-выпукла. Тогда, во-первых, h — выпуклая неубывающая функция, причем $h(b)>h(a)$, и, во-вторых, I является $H\odot 1$-выпуклой функцией. Из теоремы Фенхеля — Моро следует, что $l^{**}=l$. Применяя формулу (5.3), имеем $(b-a)h(x)=(b-x)h(a)+(x-a)h(b)$ для всех x из $[a, b]$. Таким образом, h — аффинная функция. Предложение доказано.

Пример 5.2. Пусть H — некоторое множество конечных функций, определенных на Q, и f, g суть $H\odot\mathbf{1}$-выпуклые функции. Из теоремы Фенхеля — Моро следует, что равенство f^* и g^* влечет равенство функций f и g. Используя это обстоятельство и пример 3.5, легко проверить справедливость следующего утверждения.

Пусть f, $g\in C([a, b])$, где $a>0$. Если для любых чисел k, l (где $k\leqslant 0$, $l\leqslant 0$) выполняется соотношение

$$\sup_{x\in[a,b]}(kx^2+lx-f(x))=\sup_{x\in[a,b]}(kx^2+lx-g(x)),$$

то $f=g$.

Пример 5.3. Пусть, как и выше, H — некоторое множество конечных функций, определенных на Q, и $f\in X_Q$. Величину $f^*(h)$ назовем *полууклонением* f от h. Естественно поставить вопрос об определении функции, которая дала бы наименьшее полууклонение от данной функции f среди всех элементов $h\in H$. Прежде всего, попытаемся вычислить $\inf_{h\in H}\sup_{x\in Q}(h(x)-f(x))$. Предположим, что существует точка $x_0\in Q$ такая, что $h(x_0)=0$ для всех $h\in H$. Тогда

$$\inf_h\sup_x(h(x)-f(x))=\inf_h f^*(h)=-\sup_h(-f^*(h))=$$
$$=-\sup_h(h(x_0)-f^*(h))=-f^{**}(x_0).$$

В частности, если f есть $H\odot\mathbf{1}$-выпуклая функция, то

$$\inf_{h\in H}\sup_{x\in Q}(h(x)-f(x))=-f(x_0). \tag{5.4}$$

Предположим, что inf в формуле (5.4) реализуется на некотором элементе $h_0\in H$. Тогда $h_0+f(x_0)\mathbf{1}\leqslant f$ и, кроме того, $f(x_0)=(h_0+f(x_0)\mathbf{1})x_0)$ (т. е. функция $h_0+f(x_0)\mathbf{1}$ является опорной к f в точке x_0). Нетрудно проверить, что и наоборот, если элемент $h_0+\alpha\mathbf{1}$ множества $H\odot\mathbf{1}$ опорен к f в точке x_0 (т. е. $h_0+\alpha\mathbf{1}\in U_f$ и $(h_0+\alpha\mathbf{1})(x_0)=f(x_0)$), то функция h_0 реализует инфимум в (5.4). Итак, необходимое и достаточное условие существования элемента, наименее полууклоняющегося от $H\odot\mathbf{1}$-выпуклой функции f, заключается в том, что найдется функция $g \in H \odot 1$, опорная к f в точке x_0. При этом g и является решением задачи.

Отметим, что имеет место

Предложение 5.9. *Пусть отрезок* $[a, b]$ *содержит нуль, а* H_0 *совокупность всех конечных функций* h, *определенных на* $[a, b]$ *и обладающих тем свойством, что* $h(0)=0$. *Пусть, далее,* f — *полунепрерывная снизу функция, определенная на* $[a, b]$ *и принимающая конечные значения. Найдутся вещественные числа* k *и* l, *причем* $k \leqslant 0$, *такие что*

$$\inf_{h \in H_0} \sup_{x \in [a,b]} (h(x) - f(x)) = \sup_{x \in [a,b]} (kx^2 + lx - f(x)) = -f(0).$$

Если, кроме того, f выпукла, то можно считать, что $k=0$.

Пример 5.4. Пусть h — непрерывная возрастающая функция, определенная на $[0, +\infty)$, причем множество значений функции h также совпадает с $[0, +\infty)$. Положим $H=(\alpha h)_{\alpha \geqslant 0}$ и рассмотрим множество Q функций, определенных на H и порожденных точками из области определения h. (Другими словами, Q состоит из функций $\hat{x}: \alpha h \to \alpha h(x)$, где $x \in [0, +\infty)$). Отождествляя H с R_+, получим, что Q состоит из всех линейных неубывающих функций, определенных на $[0, +\infty)$. Отсюда следует, что множество $P(Q \odot 1)$ состоит из всех выпуклых неубывающих функций, определенных на $[0, +\infty)$ (и принимающих, возможно, бесконечные значения).

Из теоремы Фенхеля — Моро и предложения 5.1 следует, что $g \in P(Q \odot 1)$ в том и только в том случае, если $g=f^*$ для некоторой функции $f \in X_Q$ (здесь * означает H-преобразование Юнга). Таким образом, множество всех функций, являющихся H-преобразованиями Юнга, не зависит от h (однако класс $H \odot 1$-выпуклых функций от h, безусловно, зависит).

Из изложенного также следует, что функция f является $H \odot 1$-выпуклой в том и только в том случае, если найдется выпуклая неубывающая функция g такая, что

$$f(x) = \sup_{\alpha \geqslant 0} (\alpha h(x) - g(\alpha)) = g^*(h(x)).$$

Здесь * — это «обычное» преобразование Юнга (по линейным функциям).

6°. Некоторые приложения теории сопряженных выпуклых функций. Теория сопряженных выпуклых функций была развита в основном для исследования выпуклых экстремальных задач. Ограничимся лишь тем, что наметим схему этого исследования (подробная реализация схемы приведена, например, в [69]).

Рассмотрим л. в. п. V, в котором введено отношение предпорядка с помощью замкнутого конуса K. Пусть S — некоторое множество, A — отображение S в V и φ — конечная функция, определенная на S.

Рассмотрим следующую задачу (A_0). Найти

$$\inf\{\varphi(s) : s\in S, \quad A(s)\geqslant 0\}.$$

Для исследования этой конкретной задачи удобно рассмотреть семейство задач (A_x). Найти

$$\inf\{\varphi(s) : s\in S; \quad A(s)\geqslant x\} \quad (x\in V).$$

Элемент $s\in S$ называется *допустимым* для задачи (A_x), если $A(s)\geqslant x$. Сеть $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ называется *почти допустимой* для этой задачи, если найдется сеть $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ где $x_\lambda\in V$, $x_\lambda\geqslant x$ при всех $\lambda\in\Lambda$ и $As_\lambda - x_\lambda\to 0$. Для каждого $x\in V$ положим

$$M(x)=\inf\{\varphi(s) : s\in S; \quad A(s)\geqslant x\};$$

$$m(x)=\inf_{(s_\lambda)}\lim_{\lambda}\varphi(s_\lambda).$$

(Здесь inf вычисляется по всем почти допустимым для задачи (A_x) сетям.)

Величина $M(x)$ называется *значением* задачи (A_x), а $m(x)$ — *слабым значением* задачи. Задача (A_x) называется *корректно поставленной*, если $M(x)=m(x)$. (Ясно, что всегда $M(x)\geqslant m(x)$.) Можно показать, что функция $m : x\to m(x)$ является (нижним) замыканием функции $M : x\to M(x)$.

Предположим, что $M\in X_V$ и вычислим функцию M^*, сопряженную к M. (Будем считать, что H совпадает с пространством V', сопряженным к V; в этом случае H-преобразование Юнга называется просто *преобразованием Юнга*.) Имеем для $h\in V'$:

$$M^*(h)=\sup_x(h(x)-M(x))=\sup_x\Big(h(x)-\inf_{\substack{s\in S,\\ A(s)\geqslant x}}\varphi(s)\Big)=$$

$$=\sup_x\sup_{s\in S,\, A(s)\geqslant x}(h(x)-\varphi(s))=$$

$$= \sup_{s \in S} \sup_{x \in V,\ x \leqslant A(s)} (h(x) - \varphi(s)) =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{если } h \overline{\in} K^* \\ \sup\limits_{s \in S} (h(A(s)) - \varphi(s)) & \text{если } h \in K^*. \end{cases}$$

Положим

$$\psi(h) = \inf_{s \in S} (\varphi(s) - h(A(s)))\ (h \in K^*).$$

Тогда

$$M^*(h) = \begin{cases} +\infty & h \overline{\in} K \\ -\psi(h) & h \in K. \end{cases}$$

Во многих задачах замыкание m функции M выпукло (это можно гарантировать, если (A_0) — *выпуклая задача*, т. е. если S — выпуклое множество в векторном пространстве, φ — выпуклая функция, а оператор A вогнут (т. е. $A(\alpha s_1 + \beta s_2) \geqslant \alpha A(s_1) + \beta A(s_2)$; $(\alpha,\ \beta > 0;$ $\alpha + \beta = 1)$).

Предполагая, что функция m выпукла, и используя предложение 5.4, будем иметь

$$\overline{M}(x) = m(x) = M^{**}(x) = \sup_{h \geqslant 0} (h(x) + \psi(h)).$$

В частности,

$$\overline{M}(0) = m(0) = \sup_{h \geqslant 0} \psi(h). \tag{6.1}$$

Рассмотрим следующую задачу (D). Найти

$$N = \sup_{h \geqslant 0} \psi(h).$$

Задача (D) называется *двойственной* к задаче (A_0), число N называется *значением задачи* (D). Таким образом, если функция m выпукла, то слабое значение задачи (A_0) совпадает со значением задачи (D). Если, кроме того, задача (A_0) корректно поставлена, то значение $M(0)$ задачи (A_0) совпадает со значением двойственной задачи (D). Это утверждение иногда называют *теоремой двойственности*.

Из формулы (6.1) и определения функции ψ следует, что

$$m(0) = \sup_{h \geqslant 0} \inf_{s \in S} (\varphi(s) - h(A(s))).$$

С другой стороны, из соотношения

$$\sup_{h \geqslant 0} (\varphi(s) - h(A(s))) = \begin{cases} \psi(s), & \text{если } A(s) \in K \\ +\infty, & \text{если } A(s) \overline{\in} K \end{cases}$$

следует, что

$$M(0) = \inf_{s \in S} \sup_{h \geqslant 0} (\varphi(s) - h(A(s))).$$

Таким образом, если задача (A_0) корректно поставлена, то для *функции Лагранжа* $L(s, h) = \varphi(s) - h(A(s))$ этой задачи имеет место «теорема о минимаксе»[1]:

$$\inf_{s \in S} \sup_{h \geqslant 0} L(s, h) = \sup_{h \geqslant 0} \inf_{s \in S} L(s, h).$$

Рассмотрим некоторые приложения теории сопряженных функций к изучению поляр.

Пусть U — непустое подмножество л. в. п. V. Как известно, *полярой* U называется множество U^0 в пространстве $H = V'$, определяемое формулой $U^0 = \{h \in \in H : h(x) \leqslant 1$ для всех $x \in U\}$. Нетрудно проверить, что поляра U^0 это выпуклое, замкнутое в $\sigma(V', V)$ множество, содержащее нуль. С множеством U связывают три функции: *индикаторную* δ_U, напомним, что $\delta_U(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ +\infty & x \overline{\in} U \end{cases}$; *калибровочную* (Минковского) μ_U

$$\mu_U(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\} & x \neq 0, \end{cases}$$

заметим, что $\operatorname{dom} \mu_U = \operatorname{Co}(U)$; наконец, множеству U отвечает функция p_U (определенная на H формулой $p_U(h) = \sup_{x \in U} h(x)$). Если U — выпуклое и замкнутое множество (т. е. H-выпуклое множество), то сублинейный функционал p_U называется *опорной функцией* U. (Напомним, что само U называется множеством опорных к p_U.)

Поляра множества U просто описывается в терминах функционала p_U; из определения вытекает, что $U^0 =$

[1] Этот результат иногда называют теоремой о седловой точке или теоремой Куна — Таккера.

$=\{h\in H: p_U(h)\leqslant 1\}$. Так как (см. формулу (5.2)) $p_U=\delta_U^*$, то

$$U^0=\{h\in H:\ \delta_U^*(h)\leqslant 1\}. \tag{6.2}$$

Предложение 6.1. (*Формула двойственности калибровочных и опорных функций.*) *Если* $U\subset H$, *то* $\delta_{U^0}=\mu_U^*$; *если, кроме того,* $0\in U$, *то* $\delta_U^*=\mu_{U^0}$

Доказательство. (1). Для $h\in H$ имеем

$$\mu_U^*(h)=\sup_{x\in V}(h(x)-\mu_U(x))=\sup_{x\in C\,o(U)}\left(h(x)-\inf_{\lambda>0,x\in\lambda U}\lambda\right)=$$

$$=\sup_{(x,\lambda):\lambda>0,x\in\lambda U}(h(x)-\lambda)=\sup_{\lambda>0}\sup_{x\in\lambda U}(h(x)-\lambda)=$$

$$=\sup_{\lambda>0}\left(\lambda\sup_{x\in U}(h(x)-1)\right)=\begin{Bmatrix}0 & h\in U^0\\ +\infty & h\overline{\in} U^0\end{Bmatrix}=\delta_{U^0}(h).$$

(2). Пусть $0\in U$. Тогда $p_U(h)\geqslant 0$ для всех $h\in H$. Поэтому, используя (6.2), для $h\neq 0$ имеем

$$\mu_{U^0}(h)=\inf\left\{\lambda>0:\ \frac{h}{\lambda}\in U^0\right\}=$$

$$=\inf\left\{\lambda>0:\ \delta_U^*\left(\frac{h}{\lambda}\right)\leqslant 1\right\}=\inf\{\lambda>0:\ \delta_U^*(h)\leqslant\lambda\}=$$

$$=\delta_U^*(h).$$

В то же время $\mu_{U^0}(0)=\delta_U^*(0)\doteq 0$. Предложение доказано.

Предложение 6.1 показывает, что поляры можно изучать с помощью сопряженных функций. В качестве иллюстрации приведем следующее

Предложение 6.2. *Пусть* $U\subset V$. *Равенство* $U^{00}=U$ *справедливо в том и только в том случае, если* U *выпукло, замкнуто и содержит нуль.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что выпуклость и замкнутость U эквивалентна выпуклости δ_U; поэтому если U выпукло и замкнуто, то $\delta_U^{**}=\delta_U$. Если, кроме того, $0\in U$, то $\delta_U^*=\mu_{U^0}$; поэтому $\delta_U^{**}=\mu_{U^0}^*=\delta_{U^{00}}$, т. е. $U=U^{00}$. Обратное очевидно.

Отметим, что имеет место

Предложение 6.3. *Если* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — *выпуклые множества, содержащие нуль, то*

$$\left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right)^0 = \bigcup_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_n=1\\ a_1,a_2,\ldots,a_n\geqslant 0}} \bigcap_{i=1}^{n} a_i U_i^0$$

(*здесь положено* $0\,U_i^0 = \bigcap_{\lambda>0} \lambda U_i^0$).

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\delta_{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} U_i\right)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{U_i}$. Поэтому (предложения 5.6 и 6.1).

$$\left(\delta_{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} U_i\right)}\right)^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{U_i}\right)^* = \sum_{i=1}^{n} \delta^*_{U_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{U_i^0}.$$

С другой стороны, $\left(\delta_{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} U_i\right)}\right)^* = \mu_{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} U_i\right)^0}$. Итак,

$$\mu_{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} U_i\right)^0} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{U_i^0}.$$

Это равенство означает, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^0 = \left\{h \in H : \sum_{i=1}^{n} \mu_{U_i^0}(h) \leqslant 1\right\}.$$

Учитывая, кроме того, $\mu_{U_i^0}(h) \geqslant 0$, нетрудно убедиться в справедливости предложения.

Приведем два примера.

Пример 6.1. Пусть K — конус в пространстве V. Тогда $K^0 = -K^*$, кроме того,

$$\mu_K(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x \in K \\ +\infty & x \overline{\in} K \end{Bmatrix} = \delta_K(x);$$

$$p_K = \delta^*_K = \mu_{-K^*} = \delta_{-K^*}.$$

Пример 6.2. Пусть V — нормированное пространство, S — единичный шар в V. Тогда μ_S совпадает с нормой в V, а $p_S = \delta^*_S = \mu_{S^0}$ — со стандартной нормой в V'. При этом поляра S^0 совпадает с единичным шаром пространства V'.

7°. **H-вогнутые функции.** Пусть V локально выпуклое пространство. Функция $f: V \to \bar{R}$ называется *вогнутой*, если функция $-f$ выпукла. Исследование вогнутых функций сводится к изучению выпуклых функций. Опишем некоторые простейшие свойства вогнутых функций с тем, чтобы ввести соответствующую терминологию.

При изучении вогнутых функций вместо надграфика функции удобнее оперировать ее подграфиком. Если $f: V \to \bar{R}$, то по определению *подграфик* $\operatorname{hyp} f$ есть множество $\{(x, \lambda) \in V \times R; \lambda \leqslant f(x)\}$.

Подграфик $\operatorname{hyp} f$ замкнут в том и только в том случае, если f полунепрерывна сверху. В связи с этим, полунепрерывные сверху функции называются *замкнутыми сверху* (или, если это не вызовет недоразумений, просто замкнутыми). Из определения следует, что f вогнута в том и только в том случае, если ее подграфик $\operatorname{hyp} f$ является замкнутым, выпуклым и нецилиндрическим множеством. Если, кроме того, $\operatorname{hyp} f$ — конус, то f называется *суперлинейным функционалом*. Суперлинейность f эквивалентна сублинейности $-f$.

Из теоремы Хермандера следует, что функция f вогнута в том и только в том случае, если она является поточечным инфимумом (нижней огибающей) некоторого множества аффинных функций; функционал f суперлинеен в том и только в том случае, если он является поточечным инфимумом некоторого множества линейных функционалов.

Естественным образом можно ввести в рассмотрение H-вогнутые элементы (функции) и множества. В обозначениях пункта 1° элемент $p \in X$ назовем *H-вогнутым*, если найдется множество U из H такое, что $p = \inf U$. (Считаем, что наибольший элемент $+\infty$ структуры Y не входит в H.) Множество $U_p = \{h \in H : h \geqslant p\}$, где $p \in Y$, по аналогии со случаем H-выпуклости, называется *множеством опорных* к p, а его элементы — *опорными* к p. (Такое смешение терминов не приведет к путанице.) Подмножество U множества H называется *H-вогнутым,* если оно является множеством опорных к некоторому $p \in Y$.

Свойства H-вогнутых функций и множеств вполне аналогичны свойствам H-выпуклых функций и множеств.

8°. Сублинейные операторы. Здесь[1] будут представлены некоторые классы H-выпуклых операторов, точнее, подклассы множества сублинейных операторов. Отображение $P: V \to Z$, где V — полулинейное пространство, а Z — некоторый K-полулинеал, будет называться *сублинейным оператором*[2], если P положительно однородно (т. е. $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ $(\lambda > 0,\ x \in V)$) и субаддитивно (т. е. $P(x+y) \leqslant P(x) + P(y)$ $(x, y \in V)$).

Интерес к сублинейным операторам, с одной стороны, объясняется ролью, которую они играют в приложениях (например, в математической экономике [122] и в некоторых задачах метрической теории функций [130]), с другой, особой важностью обстоятельств, при которых методы исследования таких операторов должны в общем случае основываться на предложениях, принципиально отличных от использованных при исследовании сублинейных функционалов. Дело в том, что теорема Хана — Банаха в полной мере перенесена на случай операторов быть не может (см. [77, 62, 115]). Относительно благополучно дело обстоит лишь в случае сублинейных операторов, действующих в K-пространство. Для сублинейного оператора P, действующего из векторного пространства V в K-пространство Z, имеет место представление

$$Px = \sup_{A \in U} Ax \quad (x \in V), \tag{8.1}$$

где U — некоторое множество аддитивных и однородных операторов $A: V \to Z$. Более того, справедливо

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Для каждой точки $x_0 \in V$ существует оператор $A: V \to Z$, опорный к P в точке x_0, т. е. $Ax \leqslant Px$ $(x \in V)$ и $Ax_0 = Px_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L = \{\alpha x_0\}_{\alpha \in R}$. Определим оператор $A': L \to Z$ соотношением $A': \alpha x_0 \to \alpha P x_0$. Тогда $A'h \leqslant Ph$ для всех $h \in L$. В самом деле, для $\alpha \geqslant 0$, очевидно, $A'(\alpha x_0) = \alpha P x_0 = P(\alpha x_0)$. Кроме того, поскольку $0 = P(x_0 - x_0) \leqslant P(x_0) + P(-x_0)$, то $A'(-x_0) \leqslant P(-x_0)$, т. е. $A'(-\alpha x_0) \leqslant \alpha P(-x_0) = P(-\alpha x_0)$. Таким образом, по теореме Хана — Банаха — Канторовича найдется оператор $A: V \to Z$ такой, что $Ax \leqslant Px$ для всех $x \in V$ и,

[1] Основные результаты этого пункта принадлежат Ю. Э. Линке.

[2] Последовательнее назвать такое отображение слабо сублинейным оператором.

кроме того, $Ah=A'h$ $(h\in L)$. Очевидно, A — требуемый оператор.

Обозначив через H множество аддитивных и однородных операторов из V в Z, а через Y множество отображений $\varphi: V\to Z$ с упорядочением $\varphi_1\leqslant\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 x\leqslant\varphi_2 x (x\in V)$ и с присоединенными наибольшими и наименьшими элементами, получаем, что каждый сублинейный оператор $P: V\to Z$ входит в $P(H, Y, Y)$.

Ниже мы ограничимся изучением некоторых частных классов сублинейных операторов, для которых могут быть получены представления типа (8.1).

Итак, пусть V — нормированное пространство и Z — это K-полулинеал, образованный присоединением наибольшего элемента $+\infty$ к K-линеалу $C(Q)$ непрерывных на некотором компакте Q функций[1]. В определении сублинейного оператора P будет, как обычно, включаться некоторое требование топологического характера. Именно, будем требовать (br)-*полунепрерывность снизу*, т. е. считать, что если $x_n\to x$ (в V), то для всякого $\varepsilon>0$ при достаточно больших n имеет место неравенство $Px-\varepsilon 1\leqslant Px_n$. Пусть Y — это пространство всех отображений V в пространство $\bar{R}^Q$, а X — совокупность сублинейных операторов $P: V\to Z$. Пусть H — множество (br)-линейных операторов $A: V\to C(Q)$. Рассмотрим множество $P(H, X, Y)$.

Прежде всего, с каждым сублинейным оператором P свяжем множество функционалов $(p_t)_{t\in Q}$, где $p_t: x\to \to (Px)(t)$. Очевидно, что $p_t: V\to R\cup\{+\infty\}$, субаддитивен и положительно однороден. Докажем сублинейность p_t (т. е. полунепрерывность снизу этого функционала). В силу (br)-полунепрерывности снизу оператора P для произвольной последовательности $x_n\to x$ (в V) и любого $\varepsilon>0$ справедливы неравенства $Px-\varepsilon 1\leqslant Px_n$ при достаточно больших n. Иначе, $(Px)(t)-\varepsilon\leqslant(Px_n)(t)$, что и требовалось.

Каждому функционалу p_t сопоставим его опорное множество $\Omega_t=U_{p_t}$. Сублинейный оператор P порождает отображение $\Phi_P: Q\to 2^{V'}$ (где 2^T — множество подмножеств T), определенное соотношением $\Phi_P: t\to \to\Omega_t$. При этом, получившееся отображение обладает

[1] Во всех рассуждениях этого пункта можно рассматривать, на самом деле, паракомпактные пространства Q.

важным свойством слабой полунепрерывности снизу (определение которого будет дано ниже). Естественна поэтому попытка изучить свойства оператора P с помощью отображения Φ_P. Введем следующее определение.

Отображение $\Phi: Q \to 2^T$, где T — топологическое пространство, называется *полунепрерывным снизу*, если для любого открытого множества $U \subset T$ множество $\{t \in Q : \Phi(t) \cap U \neq \varnothing\}$ открыто,

Выделение этого класса отображений оправдано теоремой Майкла [121].

Теорема Майкла. *Пусть Q — (пара) компактное, а T — банахово пространства и полунепрерывное снизу отображение Φ таково, что при каждом $t \in Q$ множество $\Phi(t)$ не пусто, выпукло и замкнуто. Существует непрерывный селектор отображения Φ, т. е. непрерывная функция $\varphi: Q \to T$ такая, что $\varphi(t) \in \Phi(t)$ $(t \in Q)$.* Потребуется следующее простое

Следствие. *В условиях теоремы Майкла для каждых $t_0 \in Q$ и $l_0 \in \Phi(t_0)$ найдется непрерывный селектор φ отображения Φ такой, что $\varphi(t_0) = l_0$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Phi: Q \to 2^T$ такое, что

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{cases} l_0, & t = t_0 \\ \Phi(t), & t \neq t_0. \end{cases}$$

Можно видеть, что $\tilde{\Phi}$ полунепрерывно снизу. Применяя к $\tilde{\Phi}$ теорему Майкла, получим требуемое.

В дальнейшем пространство V' будет рассматриваться с двумя топологиями — с сильной и слабой. Условимся, говоря о том или ином понятии, использующем топологию в V', употреблять термин «слабо», если речь идет о слабой топологии, и «сильно», если речь идет о сильной топологии.

С каждым сублинейным оператором P было связано слабо полунепрерывное снизу отображение $\Phi_P: Q \to 2^{V'}$. Связь этого отображения с вопросом об H-выпуклости сублинейного оператора описывает простое

Предложение 8.2[1]. *Непрерывный линейный оператор A, опорный к сублинейному оператору P, порождает*

---

[1] См. [48], гл. VI.

по формуле $\varphi(t)(x)=(Ax)(t)$ *слабо непрерывный селектор* $\varphi:Q\to 2^{V'}$ *отображения* Φ_P. *Наоборот, каждый слабо непрерывный селектор* $\varphi:Q\to 2^{V'}$ *отображения* Φ_P *порождает линейный непрерывный оператор* A *по формуле* $(Ax)\ (t)=\varphi(t)\ (x)$, *причем* A *опорен к* P.

К сожалению, пространство V' со слабой топологией, как правило, не является банаховым. В связи с этим в дальнейшем будут изучаться два класса сублинейных операторов, для которых соответствующие отображения Φ_P удовлетворяют условиям теоремы Майкла, т. е. сильно полунепрерывны снизу.

Сублинейный оператор P называется *равностепенно непрерывным* (соответственно, *равностепенно непрерывным снизу*), если для каждого $\varepsilon>0$ и $t_0\in Q$ найдется окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что

$$(Px)(t_0)-\varepsilon\leqslant(Px)(t)\leqslant(Px)(t_0)+\varepsilon, \tag{8.2}$$

(соответственно,

$$(Px)(t_0)-\varepsilon\leqslant(Px)(t) \tag{8.3}$$

при $x\in\operatorname{dom}P=\{x\in V:Px<+\infty\}$, $\|x\|\leqslant1$, $t\in U(t_0)$).

Класс равностепенно непрерывных сублинейных операторов обозначим X_1, а класс равностепенно непрерывных снизу операторов — X_2. Очевидны включения $X_1\subset X_2\subset X$.

Предложение 8.3. *Для равностепенно непрерывного оператора* P *отображение* $\Phi_P:Q\to 2^{V'}$ *сильно полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Допустим, что предложение неверно. Тогда найдутся (сильно) открытое множество U, содержащееся в V', точка $t_0\in Q$ и сеть $(t_\alpha)_{\alpha\in A}\subset Q$ такие, что $\Phi_P(t_0)\cap U\neq\varnothing$, $t_\alpha\to t_0$, $\Phi_P(t_\alpha)\cap U=\varnothing$. Так как множество U открыто, то оно содержит некоторый шар l_0+B_r с центром в точке l_0 и радиуса r. Поскольку $\Phi_P(t_\alpha)\cap(l_0+B_r)=\varnothing$, то по теореме отделимости найдутся элементы $x_\alpha\in V$, $\|x_\alpha\|=1$, $x_\alpha\in\operatorname{dom}P$ $(\alpha\in A)$ и такие, что

$$\sup_{l\in\Phi_P(t_\alpha)} l(x_\alpha)<l_0(x_\alpha)+\inf_{\|l\|\leqslant r} l(x_\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$p_{t_\alpha}(x_\alpha)<l_0(x_\alpha)-r. \tag{8.4}$$

В силу равностепенной непрерывности снизу оператора P по $\varepsilon = \frac{r}{2}$ найдется окрестность $U(t_0)$, в которой выполнено (8.3). Таким образом, для всех индексов α таких, что $t_\alpha \in U(t_0)$, имеется неравенство $p_{t_0}(x_\alpha) + \frac{r}{2} < l_0(x_\alpha)$, противоречащее условию $l_0 \in \Phi_P(t_0)$. Предложение доказано.

Аналогично предложению 8.2 устанавливается

Предложение 8.4[1]. *Однородный и аддитивный оператор равностепенно непрерывен*[2] *в том и только в том случае, если соответствующая ему функция* $\varphi: Q \to V'$ *сильно непрерывна.*

Для описания классов X_1 и X_2 естественно в качестве H выбрать класс линейных операторов, соответствующих сильно непрерывным функциям $\varphi: Q \to V'$. Заметим, что $H \subset X_1 \subset X_2 \subset X \subset Y$, и покажем, что любой элемент $P \in X_2$ является H-выпуклым. В самом деле, по предложению 8.3 отображение $\Phi_P: Q \to 2^{V'}$ сильно полунепрерывно снизу. Обозначим через U_P множество сильно непрерывных селекторов отображения Φ_P, или, что (с точностью до изоморфизма) то же самое, множество $\{A \in H : A \leqslant P\}$. Имеем

$$\sup U_P : x \to \sup_{A \in U_P} [Ax(t)].$$

Кроме того, по следствию теоремы Майкла для всех $t \in Q$, $x \in V$ справедливы равенства

$$\sup_{A \in U_P} [Ax(t)] = \sup_{l \in \Omega_t} l(x) = p_t(x) = Px(t).$$

Итак, P является H-выпуклым элементом, причем U_P — это его опорное множество. Заметим также, что справедливо представление

$$Px = \sup_C Ax, \tag{8.5}$$

где $\sup_C$ означает супремум в структуре $C(Q)$. Дело в том, что функция Px, являющаяся верхней огибающей семейства $(Ax)_{A \in U_P}$, непрерывна.

Опишем совокупности H-выпуклых множеств $\mathfrak{B}(H, X_1, Y)$ и $\mathfrak{B}(H, X_2, Y)$. По определению $U \in \mathfrak{B}(H, X_i,$

---

[1] См. [48], гл. VI.

[2] Как синонимы равностепенной непрерывности оператора используются также термины: компактность и полная (вполне) непрерывность.

Y) в том и только в том случае, если найдется $P \in X_i$ такой, что $U = U_P$ $(i=1, 2)$. Выше было показано, что U_P отождествляется с множеством сильно непрерывных селекторов отображения Φ_P. Тем самым описание $\mathfrak{B}(H, X_i, Y)$ сводится к характеризации отображений $\Phi: Q \to 2^{V'}$, для которых $\Phi = \Phi_P$ при некотором $P \in X_i$.

Введем следующие определения. Будем говорить, что *отображение* $\Phi: Q \to 2^T$, где T — топологическое векторное пространство, *равномерно полунепрерывно снизу*, если для любой окрестности нуля $W \subset T$ и точки $t_0 \in Q$ найдется окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что $\Phi(t) \cap (l + W) \neq \varnothing$ при $t \in U(t_0)$ и $l \in \Phi(t_0)$. Заметим, что равномерно полунепрерывное снизу отображение полунепрерывно снизу. Условимся, далее *отображение* Φ называть *непрерывным*, если оно равномерно полунепрерывно снизу и, кроме того, *полунепрерывно сверху* в том смысле, что для любого открытого множества $W \subset T$ и точки $t_0 \in Q$ найдется окрестность точки t_0, для всех элементов t которой справедливо соотношение $\Phi(t) \subset \Phi(t_0) + W$.

Предложение 8.5. *Сублинейный оператор P равностепенно непрерывен снизу в том и только в том случае, если отображение $\Phi_P: Q \to 2^{V'}$ сильно равномерно полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Необходимость условия предложения устанавливается так же, как предложение 8.3. Несколько сложнее доказательство достаточности.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in Q$ произвольны. Необходимо найти окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такую, что $(Px)(t) \geqslant (Px)(t_0) - \varepsilon$ при $t \in U(t_0)$ и $\|x\| \leqslant 1$. В силу равномерной полунепрерывности снизу отображения Φ_P для шара $B_\varepsilon = \{x \in V': \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ и $t_0 \in Q$ найдется окрестность $U(t_0)$, фигурирующая в соответствующем определении. Покажем, что эта окрестность искомая.

Рассмотрим с этой целью для каждого $l_0 \in \Phi_P(t_0)$ отображение $\hat{\Phi}_P: Q \to 2^{V'}$, определенное соотношением

$$\hat{\Phi}_P(t) = \begin{cases} l_0, & t = t_0 \\ (l_0 + B_3) \cap \Phi_P(t), & t \in U(t_0) \setminus \{t_0\} \\ \Phi_P(t), & t \in Q \setminus U(t_0). \end{cases}$$

Можно показать, что это отображение полунепрерывно снизу. Пусть U множество сильно непрерывных селекторов отображения $\hat{\Phi}_P$, а U_1 — соответствующее множество линейных операторов. Тогда $(Ax)(t) \leqslant (Ax)(t_0) - \varepsilon$ $(A \in U_1)$ при $t \in U(t_0)$ и $\|x\| \leqslant 1$. По следствию теоремы Майкла для каждого $l_0 \in \Phi_P(t_0)$ найдется $\varphi \in U$ такой, что $\varphi(t_0) = l_0$. Поэтому

$$(Px)(t) \geqslant (Ax)(t) \geqslant \sup_{A \in U_1} Ax(t_0) - \varepsilon = (Px)(t_0) - \varepsilon$$

при $t \in U(t_0)$, $\|x\| \leqslant 1$. Предложение доказано.

Аналогичным способом устанавливается

Предложение 8.6. *Для того, чтобы сублинейный оператор P являлся равностепенно непрерывным, необходима и достаточна сильная непрерывность отображения Φ_P.*

Условимся, что отображение Φ входит в $\mathfrak{B}(H, X_i, Y)$, если множество U_Φ его сильно непрерывных селекторов (или, что то же самое, множество отвечающих селекторам операторов) входит в $\mathfrak{B}(H, X_i, Y)$.

Предложение 8.7. *Отображение $\Phi : Q \to 2^{V'}$ входит в $\mathfrak{B}(H, X_2, Y)$ в том и только в том случае, если*

(1) *при каждом $x \in V$ функция $t \to \sup_{\varphi \in U_\Phi} \varphi(t)(x)$ непрерывна;*

(2) *Φ сильно равномерно полунепрерывно снизу;*

(3) *для каждого $t \in Q$ множество $\Phi(t)$ не пусто, выпукло и замкнуто в $\sigma(V', V)$.*

Доказательство. Если $\Phi \in \mathfrak{B}(H, X_2, Y)$, то $U_\Phi = U_P$, где P равностепенно непрерывный оператор и потому $\Phi = \Phi_P$. Поскольку свойства (1)—(3) были установлены ранее для отображения Φ_P, то необходимость условий доказана.

Наоборот, пусть Φ удовлетворяет (1)—(3). Рассмотрим $P = \sup U_\Phi$. Ясно, что $P : V \to Z$, причем $\Phi_p = \Phi$. Кроме того, поскольку Φ_P сильно равномерно полунепрерывно снизу, то P равностепенно непрерывен снизу и $U_\Phi = U_P$.

Аналогичным образом можно установить справедливость следующего утверждения.

Предложение 8.8. *Отображение Φ входит в $\mathfrak{B}(H, X_1, Y)$ в том и только в том случае, если*

(1) *отображение Φ сильно непрерывно;*

(2) *множество $\Phi(t)$ для каждого $t \in Q$ не пусто, выпукло и замкнуто в $\sigma(V', V)$.*

В заключение отметим, что удовлетворительной общей теории H-выпуклых операторов и соответствующих множеств не существует.

ГЛАВА II

ДВОЙСТВЕННЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ H-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

0°. Введение. В главе рассматриваются непрерывные H-выпуклые функции, точнее говоря, элементы множества $P(H, C(Q), \widetilde{R}^q)$, где Q — компактное топологическое пространство; $C(Q)$ — пространство непрерывных на Q функций; H — конус в $C(Q)$. В дальнейшем $P(H, C(Q), \widetilde{R}^q)$ обозначается через $P(H)$, а под H-выпуклой функцией понимается элемент конуса $P(H)$.

Таким образом, непрерывная функция f является H-выпуклой, если

$$f(x) = \sup_{h \leqslant f, h \in H} h(x) \tag{0.1}$$

для всех $x \in Q$. В частности, в рассматриваемой ситуации понятие H-выпуклой функции носит локальный характер, т. е. можно определить функцию, H-выпуклую в некоторой точке. Говорят, что f является *H-выпуклой в точке x*, если выполнено (0.1).

Познакомимся с двумя основными двойственными способами задания H-выпуклых функций и некоторыми их модификациями и приложениями. Один из них связан с описанием поляры к конусу H-выпуклых функций. При известных предположениях знание поляры к конусу H-выпуклых функций позволяет получить новую информацию и о самом конусе. С другой стороны, изучение функционалов, положительных на конусе H-выпуклых функций, представляет и самостоятельный интерес для теории экстремальных задач. (Основной инструмент математического программирования — принцип двойственности — приводит к критериям решения, формулируемым в терминах двойственных объектов. Одна из центральных областей приложений этого способа — экстремальные задачи геометрии выпуклых поверхностей (см. гл. IV).)

Другой способ основан на изучении связи поведения положительных операторов на конусе H и их свойств на конусе H-выпуклых функций. Развиваемая здесь техника применяется для изучения вопросов сходимости линейных операторов (см. главу III). Для некоторых конусов с помощью теоремы (отделимости) Штрассена можно связать структуру сопряженного конуса со свойствами положительных операторов.

Поясним простую идею получения требуемых представлений конуса H-выпуклых функций. Обратимся к случаю непрерывных выпуклых функций, определенных на выпуклом компакте Ω. Выпуклость функции f по определению означает, что для любых представлений вида $z=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k z_k$, где $\alpha_k \geqslant 0$; $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$; $z, z_k \in \Omega$, справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(z_k)\geqslant f(z). \tag{0.2}$$

Пусть N множество мер вида $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varepsilon_{z_k}-\varepsilon_z$ (при указанных условиях на параметры), где ε_x — *мера Дирака*, т. е. функционал $f\to f(x)$. Пусть $K(N)$ — широко замкнутая коническая оболочка N (под *широкой топологией* в пространстве $C'(\Omega)$, сопряженном к $C(\Omega)$, понимают слабую топологию $\sigma(C'(\Omega), C(\Omega))$). Так как меры из N отвечают элементарным неравенствам (0.2), свидетельствующим о выпуклости функции, то множество $K(N)$ можно представлять себе, как множество следствий неравенств выпуклости, т. е. как множество неравенств, вытекающих из (0.2).

Пусть W^* — конус, сопряженный к конусу выпуклых функций. Рассмотрим элементы W^*, т. е. пары положительных мер μ, ν такие, что для любой выпуклой функции f имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} f d\mu \geqslant \int_{\Omega} f d\nu. \tag{0.3}$$

Интуитивно ясно, что интегральные неравенства (0.3) должны быть следствиями неравенства Иенсена (0.2). Этот факт действительно имеет место, т. е. $W^*=K(N)$.

Итак, интегральные неравенства вида (0.3) являются следствиями неравенств (0.2). Первая естественная попытка описания мер, удовлетворяющих (0.3), заключается в том, чтобы разложить меры μ и ν на части, аналогичные неравенствам Иенсена. Формализация этой идеи приводит к так называемым декомпозициям Решетняка—Люмиса.

Второй подход к (0.3) основан на следующем, близком к работам Шоке, тезисе: Мера $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_{z_k}$, фигурирующая в (0.2), есть разнесенная в точки $z_1, \ldots, z_n$ мера ε_z (или единичная масса, расположенная в точке z). Естественно поэтому пытаться представить меры μ в (0.2) как результат размазывания меры ν по компакту Ω. Формализация этого положения приводит к понятию H-распространения мер.

1°. Теорема декомпозиции. Обратимся к следующей ситуации.

Пусть X — локально выпуклое пространство и одновременно K-линеал; $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — замкнутые конусы в X. Предположим, что выполняются условия:

(а) *конический отрезок* $\langle 0, f \rangle = \{g \in K^* : g \leqslant f\}$ компактен в $\sigma(X', X)$ при любом $f \in K^*$ (где $K = \{x \in X;\ x \geqslant 0\}$);

(б) для любого $f \in K^*$ и произвольных $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \ldots, h_n \in H_n$ найдется разбиение $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ функционала f такое, что

$$f(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(h_k).$$

Под *разбиением* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ функционала f понимается набор положительных функционалов $f_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ такой, что $\sum_{k=1}^{n} f_k = f$.

При сделанных выше предположениях справедлива

Теорема декомпозиции. *Пусть $f, g \in K^*$. Неравенство*

$$f(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) \geqslant g(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n)$$

имеет место для любых $h_k \in H_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в том и только в том случае, если для любого разбиения $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ функционала g найдется разбиение $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ функционала f, обладающее тем свойством, что $f_k - g_k \in H_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Достаточность. Пусть $h_k \in H_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — выбранные произвольным образом элементы. Найдем разбиение $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ функционала g такое, что

$g(h_1 \vee \ldots \vee h_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(h_k)$. По разбиению g найдем разбиение $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ функционала f такое, что $f_k - g_k \in H_k^*$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$g(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) = \sum_{k=1}^{n} g_k(h_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(h_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) = f(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n).$$

Необходимость. Рассмотрим следующее множество:

$$S = \left\{(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in (K^*)^n : \sum_{k=1}^{n} f_k = f\right\}.$$

Ясно, что S непустое выпуклое слабо компактное подмножество пространства $(X')^n$. Положим $\widetilde{S} = S - H_1^* \times H_2^* \times \times \ldots \times H_n^*$. Очевидно, что $\widetilde{S}$ — непустое слабозамкнутое выпуклое множество.

Пусть теперь $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ некоторое разбиение g. Допустим, что элемент $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ не входит в $\widetilde{S}$. По теореме отделимости найдутся точки $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_n \in X$ такие, что неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(\bar{h}_k) - \sum_{k=1}^{n} l_k(\bar{h}_k) < \sum_{k=1}^{n} g_k(\bar{h}_k) \tag{1.1}$$

справедливо для любых $l_k \in H_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и любого элемента $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ из S. Из (1.1) следует, что $l_k(\bar{h}_k) \geqslant 0$ для всех $l_k \in H_k^*$, следовательно, $\bar{h}_k \in H_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть теперь $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$ — такое разбиение f, что

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k(\bar{h}_k) = f(\bar{h}_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee \bar{h}_n).$$

Полагая в (1.1) $l_k=0$, $f_k=\bar{f}_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, получим

$$f(\bar{h}_1 \vee \bar{h}_2 \vee \ldots \vee \bar{h}_n) = \sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k(\bar{h}_k) < \sum_{k=1}^{n} g_k(h_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} g_k(\bar{h}_1 \vee \bar{h}_2 \vee \ldots \vee h_n) = g(\bar{h}_1 \vee \bar{h}_2 \vee \ldots \vee \bar{h}_n) \leqslant$$
$$\leqslant f(\bar{h}_1 \vee \bar{h}_2 \vee \ldots \vee \bar{h}_n).$$

Полученное противоречие означает, что $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in \tilde{S}$, т. е. найдутся $l_k \in H_k^*$ и набор $(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in S$ такие, что $f_k - l_k = g_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ясно, что $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ есть требуемое разбиение функционала f. Теорема доказана полностью.

В дальнейшем *мерами* (Радона) называются элементы пространства $C'(Q)$, сопряженного к $C(Q)$. При этом, удобства ради, компакт Q, как правило, будем считать метрическим и отождествлять меру Радона с соответствующей ей по теореме Рисса—Маркова регулярной борелевской (или бэровской) мерой.

Предложение 1.1. *В каждом KN-линеале ограниченных элементов имеет место теорема декомпозиции.*

Доказательство. По теореме Крейнов—Какутани можно считать KN-линеал ограниченных элементов X реализованным как плотное подпространство $C(Q)$ непрерывных функций, где Q — некоторое компактное пространство. Условие (а) тривиально выполнено. Проверим выполнение условия (б). Пусть $h_1, \ldots, h_n$ произвольные функции из $X \subset C(Q)$ и f — положительная мера (Радона). Обозначим элемент $h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n$ через h и положим

$$E_k = \{z \in Q : h(z) = h_k(z)\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$E_1' = E_1;\ E_2' = (Q \setminus E_1') \cap E_2;\ \ldots;\ E_n' = \left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k'\right) \cap E_n.$$

Ясно, это E_k — борелевское (даже бэровское) множество, а потому E_k' также борелевское множество $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Кроме того, $E_k' \cap E_j' = \varnothing$ при $k \neq j$ и, как следует непосредственно из определения, $h(z) = h_k(z)$ $(z \in E_k')$. Определим набор $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, положив $f_k = f|_{E_k'}$. Таким образом, f_k есть сужение f на E_k'. Очевидно, что $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ — разбиение функционала f, обладающее требуемым свойством.

Теорему декомпозиции можно сформулировать и для операторов. Предварительно введем некоторые обозначения и определения. Если V_1, V_2 — упорядоченные векторные пространства, то $\mathscr{L}^+(V_1, V_2)$ — совокупность всех линейных (т. е. аддитивных и однородных) положительных операторов $T : V_1 \to V_2$.

Пусть H — конус в V_1 и $T \in \mathscr{L}^+(V_1, V_2)$. *Положительным ростком оператора T на конусе H* называется множество

$$\mathrm{Spr}\,(T, H) = \{T' \in \mathscr{L}^+(V_1, V_2) : T'h \geqslant Th \ \ (h \in H)\}.$$

Условимся символом $B(Q)$ обозначать K-пространство всех ограниченных функций, определенных на множестве Q.

Справедлива

Теорема декомпозиции для операторов. *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — замкнутые конусы в пространстве $C(Q)$, $T_1, T_2 \in \mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$. Неравенство*

$$T_1(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) \geqslant T_2(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n)$$

имеет место для любых $h_k \in H_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в том и только в том случае, если для любого разбиения $\{T_2^1, T_2^2, \ldots, T_2^n\}$ оператора T_2 найдется разбиение $\{T_1^1, T_1^2, \ldots, T_1^n\}$ оператора T_1 такое, что $T_1^k \in \mathrm{Spr}\,(T_2^k, H_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Здесь под *разбиением* оператора T понимается набор $\{T^1, T^2, \ldots, T^n\}$ операторов из $\mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{n} T^k = T$).

Доказательство.[1] Для каждого оператора $T \in \mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$ и точки $x \in Q$ положим $T_x : f \to (Tf)(x)$. Тогда $T_x \in C'(Q)$ и, кроме того, $T_x \geqslant 0$. Заметим, что

$$T_1(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) \geqslant T_2(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (T_1)_x(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) \geqslant (T_2)_x(h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n) \text{ для всех } x \in Q.$$

Требуемое утверждение непосредственно следует из теоремы декомпозиции (и предложения 1.1).

Установим два топологических свойства множеств H-выпуклых функций.

Предложение 1.2. *Пусть H — подмножество $C(Q)$. Наименьшая верхняя полуструктура, порожденная H, т. е. совокупность функций $\{h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n : h_k \in H;\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ плотна в $P(H)$.*

---

[1] Более рафинированная техника позволяет установить аналогичный факт для операторов, действующих в произвольные K-пространства.

Доказательство. Пусть f — произвольная H-выпуклая функция и $U_f = \{h \in H : h \leqslant f\}$ ее опорное множество. Рассмотрим семейство A конечных подмножеств U_f, наделенное естественной упорядоченностью по включению. Сеть $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $h_\alpha = \sup \alpha$, возрастает и поточечно сходится к f. В силу теоремы Дини f является равномерным пределом сети $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Сильно отрицательным элементом f в $C(Q)$ называют строго отрицательную функцию (т. е. $f(x) < 0$ для всех $x \in Q$).

Предложение 1.3. *Если конус H содержит сильно отрицательный элемент, то конус $P(H)$ замкнут.*

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать, что в H входит $-\mathbf{1}$. (Напомним, что $\mathbf{1} : x \to 1$ $(x \in Q)$). Пусть f — произвольная функция из $C(Q)$ такая, что для каждого натурального n найдется H-выпуклая функция h_n, удовлетворяющая условию $\|f - h_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.

Иначе $h_n - \frac{1}{n}\mathbf{1} \leqslant f \leqslant h_n + \frac{1}{n}\mathbf{1}$. Покажем, что $\sup\limits_n \left[\left(h_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}\right)(x)\right] = f(x)$. Иначе, найдется точка $x_0 \in Q$, для которой

$$f(x_0) > \sup_n \left(h_n(x_0) - \frac{1}{n}\right) \geqslant \lim_n \left(h_n(x_0) - \frac{1}{n}\right) = f(x_0),$$

что невозможно. Так как $h_n - \frac{1}{n}\mathbf{1} \in P(H)$, то и $f \in P(H)$.

Введем следующие определения. Пусть H — конус в $C(Q)$, а μ и ν — положительные меры на Q. Мера μ *H-следует* за ν, если $\mu(f) \geqslant \nu(f)$ для всех $f \in P(H)$. В этом случае употребляется запись $\mu \underset{H}{>} \nu$.

Положительная мера μ *H-сильнее* положительной меры ν, если для всякого разбиения $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$ меры ν найдется разбиение $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ меры μ такое, что $\mu_k - \nu_k \in H^*$. При этом используется запись $\mu \underset{H}{\gg} \nu$.

Конус H обладает *свойством Решетняка — Люмиса* (свойством $(R.\ L.)$), если $\mu \underset{H}{>} \nu \Leftrightarrow \mu \underset{H}{\gg} \nu$ для любых положительных мер μ и ν.

Предложение 1.4. *Для произвольного конуса H справедливо соотношение* $\left(\mu \underset{H}{\gg} \nu \Rightarrow \mu \underset{H}{>} \nu\right)$.

Доказательство. Пусть f — произвольная H-выпуклая функция. По предложению 1.2 найдется последовательность функций (f_n) таких, что $f_n = h_1 \vee \ldots \vee h_{m(n)}$, где $h_1, \ldots, h_{m(n)} \in H$, равномерно сходящаяся к f. Поскольку μ H-сильнее ν, то, рассуждая как в теореме декомпозиции, получим, что $\mu(f_n) \geqslant \nu(f_n)$. Переходя к пределу, получим $\mu \underset{H}{>} \nu$, что и требовалось.

Теорема 1.1. *Каждый замкнутый конус H в $C(Q)$ обладает свойством Решетняка — Люмиса.*

Доказательство. Следует проверить только, что $\left(\mu \underset{H}{>} \nu \Rightarrow \mu \underset{H}{\gg} \nu\right)$. Если $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ произвольное разбиение меры ν, то, поскольку элементы вида $h_1 \vee \ldots \vee h_m$, где $h_1, \ldots, h_m \in H$, входят в $P(H)$, получим, что $\mu(h_1 \vee \ldots \vee h_m) \geqslant \nu(h_1 \vee \ldots \vee h_m)$. По теореме декомпозиции (здесь используется замкнутость конуса H) найдется разбиение $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ меры μ такое, что $\mu_k(h) \geqslant \nu_k(h)$ $(k = 1, \ldots, m)$ для всех $h \in H$. Теорема доказана.

Пусть теперь операторы $T_1, T_2 \in \mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$. Будем говорить, что оператор T_1 *H-сильнее* T_2 (символическая запись $T_1 \underset{H}{\gg} T_2$), если для любого разбиения $\{T_2^1, T_2^2, \ldots, T_2^n\}$ оператора T_2 найдется разбиение $\{T_1^1, T_1^2, \ldots, T_1^n\}$ оператора T_1 такое, что $T_1^k \in \operatorname{Spr}(T_2^k, H)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Множество $\left\{T' : T' \underset{H}{\gg} T\right\}$ называется *декомпозиционным ростком* оператора T на H и обозначается через $\operatorname{Dpr}(T, H)$.

Теорема 1.2. *Пусть H и $P(H)$ — замкнутые конусы в $C(Q)$. Функция $f \in C(Q)$ является H-выпуклой в том и только в том случае, если для любых $T \in \mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$ и $T' \in \operatorname{Dpr}(T, H)$ выполняется условие $T'f \geqslant Tf$.*

Доказательство этой теоремы вытекает из предложения 1.1 и теоремы декомпозиции для операторов.

2°. H-распространения. Простейшие свойства. В пункте 1° был рассмотрен один из способов задания H-выпуклых функций. Оказалось, что класс H-выпуклых функций является наиболее широким множеством, на которое можно распространить с H некоторые операторы с сохранением отношения мажорации. В ряде ситуаций класс операторов, декомпозиционные ростки которых задают конус H-выпуклых функций, можно сузить.

Введем сначала следующее определение. Рассмотрим тройку множеств $H \subset X \subset Y$, где Y есть K-пространство; X — векторное подпространство в Y; H — конус в X. Конус H называется *минорирующим* (коинициальным), если для любого $f \in X$ множество $U_f = \{h \in H : h \leqslant f\}$ непусто. Если $Y = B(Q)$, $X = C(Q)$, где Q — компакт, то конус H является минорирующим в том и только в том случае, если он содержит сильно отрицательный элемент, т. е. функцию f такую, что $f(x) < 0$ для всех $x \in Q$.

K-пространство Y не является полной структурой, однако, оно станет такой структурой, если к нему добавить наибольший и наименьший элементы. Поэтому в рассматриваемой ситуации ($H \subset X \subset Y$, где Y есть K-пространство) имеет смысл говорить об H-выпуклых элементах.

Справедлив следующий *операторный принцип сохранения неравенств.*

Теорема 2.1. *Пусть H — минорирующий конус в векторном подпространстве X (некоторого K-пространства Y), а $E: X \to Y$ оператор тождественного вложения. Элемент $x \in X$ является H-выпуклым в том и только в том случае, если $Tx \geqslant x$ для всех $T \in \mathrm{Spr}\,(E, H)$.*

Необходимость. Пусть x является H-выпуклым. Тогда для любого $h \in U_x$ имеем $Tx \geqslant Th \geqslant h$, т. е. $Tx \geqslant \geqslant \sup U_x = x$.

Достаточность. Пусть $Tx \geqslant x$ для всех $T \in \in \mathrm{Spr}\,(E, H)$ и $x > \sup U_x$. Положим $q(x') = \sup U_{x'}$ ($x' \in \in X$). Оператор q положительно однороден и супераддитивен.

Рассмотрим подпространство $X' = \{\alpha x : \alpha \in R\}$ и положим $A'(\alpha x) = \alpha q(x)$. Оператор A' мажорирует q на X'. В самом деле, для элементов вида αx, где $\alpha \geqslant 0$, имеем $A'(\alpha x) = \alpha q(x) = q(\alpha x)$. Если $\alpha < 0$, то (так как $q(x) + + q(-x) \leqslant q(0) = 0$) имеем $A'(\alpha x) = |\alpha| (-q(x)) \geqslant \geqslant |\alpha| q(-x) = q(\alpha x)$. Применяя теорему Хана—Банаха—Канторовича, найдем распространение $A: X \to Y$ оператора A' такое, что $q(x') \leqslant Ax'$ ($x' \in X$). Оператор A положителен. Действительно, если $x' \geqslant 0$, то $Ax' \geqslant q(x') \geqslant q(0) = = 0$. Кроме того, для $h \in H$ имеем $Ah \geqslant q(h) = \sup U_h = h$. Значит, $A \in \mathrm{Spr}(E, H)$. С другой стороны, $Ax = A'x = = q(x) < x$, что невозможно. Теорема доказана [1].

---

[1] Можно заметить, что теорема 2.1 легко следует из представления (1.8.1).

Следствие. *Пусть H — минорирующий конус в $C(Q)$. Функция f является H-выпуклой в том и только в том случае, если $Tf \geqslant f$ для всех $T \in \mathrm{Dpr}(E, H)$.*

Доказательство. Следует только показать, что если положительный оператор $T: C(Q) \to B(Q)$ таков, что $Th \geqslant h$ при $h \in H$, то $T \in \mathrm{Dpr}(E, H)$. Возьмем произвольное разбиение $\{E^1, E^2, \ldots, E^n\}$ оператора E. Тогда мера $E_x^k: f \to (E_k f)(x)$, очевидно, имеет вид $E_x^k = \alpha_x^k \varepsilon_x$, где $\sum_{k=1}^{n} \alpha_x^k = 1$ и $\alpha_x^k \geqslant 0$. Разбиение оператора T определим следующим способом: $(T^k f)(x) = \alpha_x^k T_x(f)$. При этом $(T^k h)(x) = \alpha_x^k (Th)(x) \geqslant (E^k h)(x)$ для всех $x \in Q$, что и требовалось.

Пусть H — некоторый замкнутый конус в $C(Q)$; задана дискретная мера[1] $\nu = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \varepsilon_{x_k}$ $(\alpha_k > 0)$ и мера μ такова, что $\mu \underset{H}{\gg} \nu$. Для разбиения $\{\alpha_1 \varepsilon_{x_1}, \ldots, \alpha_s \varepsilon_{x_s}\}$ меры ν найдем разбиение $\{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$ меры μ такое, что $\mu_k(h) \geqslant \alpha_k \varepsilon_{x_k}(h)$ для всех $h \in H$.

Положим

$$T_{x_k} = \frac{1}{\alpha_k} \mu_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, s);$$

$$T_x = \varepsilon_x \qquad (x \in Q \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}).$$

Определим оператор $T: C(Q) \to B(Q)$ соотношением $Tf(x) = T_x(f)$ $(x \in Q)$. Оператор T, очевидно, положителен, причем

$$Th(x_k) = \frac{1}{\alpha_k} \mu_k(h) \geqslant \varepsilon_{x_k}(h) = h(x_k);$$

$$Th(x) = h(x) \qquad (x \in Q \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}).$$

Кроме того, для всех $f \in C(Q)$ имеем

$$\nu(Tf) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k (Tf)(x_k) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k(f) = \mu(f).$$

Из приведенного утверждения видно, что, по крайней мере, часть элементов поляры конуса H-выпуклых

---

[1] Термин «дискретная мера» всюду означает меру с конечным носителем.

функций состоит из функционалов, представимых в виде разности положительной меры и ее «размазывания» с помощью оператора из положительного ростка оператора тождественного вложения на H. Введем точное определение. Для этого заметим, что любой положительный оператор $T: C(Q) \to B(Q)$ однозначно определяется заданием отображения $x \to T_x$, где $T_x: f \to (Tf)(x)$. Оператор $T: C(Q) \to B(Q)$ называется *слабо измеримым,* если для любой функции $f \in C(Q)$ вещественная функция $T(f): x \to T_x(f)$ измерима по Борелю (т. е. если T действует в подпространство $B(Q)$, состоящее из измеримых по Борелю функций).

Говорят, что мера μ является (слабо измеримым) *H-распространением* меры ν, и пишут $\mu \underset{H}{\supset} \nu$, если найдется слабо измеримый оператор $T \in \operatorname{Spr}(E, H)$ такой, что $\mu(f) = \nu(Tf)$ для всех $f \in C(Q)$. Иначе, μ является (слабо измеримым) H-распространением ν, если найдется отображение $x \to T_x$ такое, что

(1) T_x — положительная мера;

(2) $T_x(h) \geqslant h(x)$ для всех $h \in H$ и $x \in Q$;

(3) функция $x \to T_x(f)$ измерима по Борелю и ограничена для каждой $f \in C(Q)$;

(4) $\mu(f) = \int\limits_Q T_x(f)\, d\nu$ для всех $f \in C(Q)$.

Отметим некоторые связи между введенными понятиями.

Предложение 2.1. *Если* $\mu \underset{H}{\supset} \nu$, *то* μ *H-следует за* ν.

Доказательство. Пусть $f \in P(H)$ и $U \in u_f$. Тогда найдется оператор T, фигурирующий в определении отношения $\underset{H}{\supset}$, такой, что $Tf \geqslant Th \geqslant h$, и, стало быть, $Tf \geqslant \sup U_x = f$. Имеем $\mu(f) = \nu(Tf) \geqslant \nu(f)$, т. е. $\mu \underset{H}{\succ} \nu$. Предложение доказано.

Предложение 2.2. *Если* μ *является H-распространением* ν, *то* μ *H-сильнее* ν.

Доказательство. Пусть $\mu \underset{H}{\supset} \nu$. Возьмем разбиение $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ меры ν и положим $\mu_k: f \to \nu_k(Tf)$. Меры $\mu_1, \ldots, \mu_n$ образуют разбиение μ, при этом для всех $h \in H$ имеем $\mu_k(h) = \nu_k(Th) \geqslant \nu_k(h)$. Таким образом, $\mu \underset{H}{\gg} \nu$.

Предложения 1.4, 2.1 и 2.2 показывают, что для произвольных положительных мер μ и ν выполняется следующая схема:

$$\begin{tikzcd} & \mu \underset{H}{\succ} \nu & \\ \mu \underset{H}{\sqsupset} \nu \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & \mu \underset{H}{\gg} \nu \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Представляет интерес выяснить, когда справедлива схема

$$\begin{tikzcd} & \mu \underset{H}{\succ} \nu \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ \mu \underset{H}{\sqsupset} \nu \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \mu \underset{H}{\gg} \nu \end{tikzcd}$$

Введем в связи с этим следующее определение. Будем говорить, что конус H обладает *свойством Харди — Литтлвуда — Полиа* (свойством (H. L. P.)), если для любых мер μ, $\nu \geqslant 0$ имеет место эквивалентность $\mu \underset{H}{\succ} \nu \Leftrightarrow \mu \underset{H}{\sqsupset} \nu$.

Выше было показано, что свойство $\mu \underset{H}{\succ} \nu \Leftrightarrow \mu \underset{H}{\gg} \nu$, т. е. свойство Решетняка — Люмиса, встречается весьма часто. Кроме того, как видно из (2.1), свойство (R. L.) заведомо есть у конусов, обладающих свойством (H. L. P.) (забегая вперед, скажем, что такие конусы бывают). Нужно, однако, иметь в виду, что свойство (H. L. P.) встречается реже, чем свойство (R. L.). В самом деле, пусть H — конус положительных функций, тогда $\mu \underset{H}{\succ} 0$ для любой $\mu \geqslant 0$. С другой стороны, очевидно, если $\mu \underset{H}{\sqsupset} 0$, то $\mu = 0$.

Ниже развивается аппарат, позволяющий описать класс конусов, обладающих свойством (H. L. P.).

3°. Теорема Штрассена. Изучение и систематическое использование техники слабо измеримых H-распространений (в случае, когда H есть конус аффинных функций на компакте в локально выпуклом пространстве) были стимулированы в основном задачами математической статистики. В настоящее время известны два подхода к изучению свойства Харди — Литтлвуда — Полиа ([159, 181]). Нам представляется более удобным подход, основанный на теореме Штрассена, доказательство которой будет изложено в этом пункте. Дело в том, что теорема Штрассена, как одна из новых теорем отделимости, представляет значительный самостоятельный интерес. Дальше приводится оригинальное доказательство Штрассена.

Пусть X — сепарабельное банахово пространство, а $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ — некоторое вероятностное пространство. Пусть $\omega \to p_\omega$ есть отображение Ω в множество конечных сублинейных функционалов на X, которое является *слабо измеримым*, т. е для каждого $x \in X$ отображение $\omega \to p_\omega(x)$ $\mathfrak{B}$-измеримо. В силу сепарабельности X отображение $\omega \to \|p_\omega\|$ (где по определению $\|p\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |p(x)|$) также $\mathfrak{B}$-измеримо. Допустим, что $\int\limits_\Omega \|p_\omega\| d\mu < +\infty$, тогда интеграл

$$p(x) = \int\limits_\Omega p_\omega(x)\, d\mu$$

определяет сублинейный функционал на X.

Теорема Штрассена. *Пусть l — опорный к p функционал.*

Найдется слабо измеримое отображение $\omega \to l_\omega$, действующее из Ω в X', такое, что функционал l_ω опорен к p_ω и, кроме того,

$$l(x) = \int\limits_\Omega l_\omega(x)\, d\mu$$

для всех $x \in X$.

Доказательство. Обозначим через L векторное пространство измеримых отображений ξ из Ω в X, принимающих только конечное число различных значений; при этом будем считать уже проведенным отождествление совпадающих почти всюду функций.

Положим $P(\xi) = \int\limits_\Omega p_\omega(\xi(\omega))\, d\mu$. Очевидно, что P является положительно однородным и субаддитивным функционалом.

Через $\tilde{L}$ обозначим векторное подпространство L, состоящее из почти всюду постоянных отображений $\tilde{\xi}: \Omega \to$

$\to X$, и определим на $\tilde{L}$ линейный функционал $\tilde{Q}: \tilde{\xi} \to l(x)_{\tilde{\xi}}$ (где $x_{\tilde{\xi}} = \tilde{\xi}(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$). Тогда

$$\tilde{Q}(\tilde{\xi}) = l(x_{\tilde{\xi}}) \leqslant p(x_{\tilde{\xi}}) = \int_\Omega p_\omega(x_{\tilde{\xi}})\, d\mu = \int_\Omega p_\omega(\tilde{\xi}(\omega))\, d\mu =$$
$$= P(\tilde{\xi}).$$

По теореме Хана — Банаха найдется линейный функционал Q на L, мажорируемый сублинейным функционалом P и являющийся распространением $\tilde{Q}$. Пусть теперь $B \in \mathfrak{B}$ и χ_B — характеристическая функция B. Тогда для $x \in X$ имеем

$$Q(x\chi_B) \leqslant P(x\chi_B) = \int_B p_\omega(x)\, d\mu \tag{3.1}$$

и, кроме того,

$$-Q(x\chi_B) = Q(-x\chi_B) \leqslant \int_B p_\omega(x)\, d\mu. \tag{3.2}$$

Таким образом, отображение $B \to Q(-x\chi_B)$ — это вещественнозначная мера μ_x, абсолютно непрерывная относительно μ. При этом ее плотность $\omega \to g_\omega(x)$ почти всюду ограничена сверху плотностью $\omega \to p_\omega(x)$.

Ввиду линейности Q, исключив множество B_0 меры нуль, получим, что g_ω есть рационально линейный функционал, минорирующий p_ω на некотором счетном плотном подмножестве $X_0 \subset X$, замкнутом относительно образования линейных комбинаций элементов с рациональными коэффициентами. Не нарушая общности, можно считать, что $B_0 = \varnothing$, поскольку требуемое отображение $\omega \to l_\omega$ из B_0 в X', очевидно, может быть легко построено.

Пусть l_ω — единственное непрерывное распространение g_ω с X_0 на X. Тогда получаем, что $l_\omega \in X'$ и $l_\omega(x) \leqslant$ $\leqslant p_\omega(x)$ для всех x. Более того, отображение $\omega \to l_\omega$ является $\mathfrak{B}$-измеримым (как поточечный предел $\mathfrak{B}$-измеримых функций).

Для любой последовательности (x_n), сходящейся к x, имеем из (3.1), (3.2), что $\lim\limits_n \sup\limits_{B \in \mathfrak{B}} |\mu_{x_n}(B) - \mu_x(B)| = 0$ и, следовательно, почти для всех (относительно μ) $\omega \in \Omega$ $l_\omega(x) = g_\omega(x)$ при $x \in X$.

Таким образом, отображение $\omega \to l_\omega(x)$ — это плотность μ_x относительно μ. Значит,

$$l(x) = \tilde{Q}(\tilde{\xi}) = Q(\tilde{\xi}) = Q(x\chi_\Omega) = \mu_x(\Omega) = \int\limits_\Omega l_\omega(x)\,d\mu.$$

Теорема доказана.

Замечание. Это доказательство опубликовано в [181]. Читатель, интересующийся развитием исследований по дифференцированию интегралов выпуклых функций, ознакомится с работой Иоффе и Левина [70].

4°. Теорема Харди — Литтлвуда — Полиа. Здесь будет описан класс конусов, обладающих свойством $(H.\ L.\ P.)$. Такими окажутся минорирующие конусы. Итак, пусть H — конус в $C(Q)$, где Q — метризуемый компакт, и f — прозвольная функция из $C(Q)$.

Положим

$$p(f): x \to \sup\ \{h(x) : h \in H\ h \leqslant f\}.$$

Для $x \in Q$ положим $p_x(f) = p(f)(x)$.

Предложение 4.1. *Функционал $p_x: f \to p_x(f)$ супераддитивен и положительно однороден.*

Доказательство. Очевидно.

Предложение 4.2. *Пусть H — минорирующий конус. Функционал $x \to \|p_x\|$ измерим по Борелю и, кроме того, $\sup\limits_x \|p_x\| < +\infty$ (где $\|p_x\| = \sup\limits_{\|f\|=1} |p_x(f)|$).*

Доказательство. Пусть f_H — сильно отрицательный элемент H, а число $\lambda > 0$ таково, что $1 \leqslant -\lambda f_H$. Для любого $f \in C(Q)$ имеем $\lambda \|f\| f_H \leqslant -\|f\| 1 \leqslant f$ и потому, учитывая, что $\lambda \|f\| f_H \in H$, получим $p_x(f) = p(f)(x) \geqslant \lambda \|f\| f_H(x)$. Из супераддитивности функционала p_x следует, что $p_x(f) \leqslant -p_x(-f)$, и потому $p_x(f) \leqslant -\lambda \|-f\| \cdot f_H(x)$. Таким образом, $|p_x(f)| \leqslant -\lambda \|f\| f_H(x) < \lambda \|f\|\,\|f_H\|$. Следовательно,

$$\|p_x\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |p_x(f)| \leqslant \lambda \|f_H\|.$$

Так как Q — метризуемый компакт, то $C(Q)$ — сепарабельное пространство. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$W_\varepsilon = \{x \in Q : \|p_x\| < \varepsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in Q : |p_x(f_n)| < \varepsilon\},$$

где (f_n) — это счетное всюду плотное подмножество единичного шара пространства $C(Q)$. Следовательно, W_ε — борелевское множество. Предложение доказано.

Предложение 4.3. *Пусть H — минорирующий конус. Положим* $(\mathrm{co}_H f)(x) = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in P(H),\ \varphi \leqslant f\}$. *Тогда* $(\mathrm{co}_H f)(x) = p_x(f)$ *для всех* $x \in Q$ *и* $f \in C(Q)$. *Кроме того, для любой положительной меры* μ *имеет место соотношение*

$$\mu(\mathrm{co}_H f) = \sup\{\mu(\varphi) : \varphi \in P(H),\ \varphi \leqslant f\}.$$

Доказательство. Прежде всего, для каждых $x \in Q$, $\varphi \in P(H)$, $\varphi \leqslant f$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = (\mathrm{co}_H \varphi)(x) = \sup\{h(x) : h \in H,\ h \leqslant \varphi\} \leqslant \\ \leqslant \sup\{h(x) : h \in H,\ h \leqslant f\} = p_x(f) \leqslant \\ \leqslant \sup\{\varphi(x) : \varphi \in P(H),\ \varphi \leqslant f\} = (\mathrm{co}_H f)(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Переходя к супремуму в левой части (4.1), получим $(\mathrm{co}_H f)(x) \leqslant p_x(f) \leqslant (\mathrm{co}_H f)(x)$, откуда следует, что $p_x(f) = (\mathrm{co}_H f)(x)$.

Перейдем к доказательству второй части предложения. Положим $\alpha = \sup\{\mu(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$, где $\Phi = \{\varphi \in P(H) : \varphi \leqslant f\}$. Выберем последовательность $\varphi_n \in \Phi$ такую, что $\mu(\varphi_n) \to \alpha$. Так как множество Φ фильтруется вправо по отношению порядка, можно считать, что последовательность (φ_n) монотонно возрастает и потому поточечно сходится к некоторой функции $\bar{f} \leqslant \mathrm{co}_H f$. По теореме о монотонной сходимости [32] $\mu(\bar{f}) = \alpha$. Покажем, что $\mu(\bar{f} - \mathrm{co}_H f) = 0$. Допустим противное, тогда множество $\{x \in Q : (\mathrm{co}_H f)(x) > \bar{f}(x)\}$ имеет положительную меру. Следовательно (напомним, что μ — регулярная мера), найдутся вещественные числа $\varepsilon > 0$ и r такие, что множество

$$\{x \in Q :\ \mathrm{co}_H(f)(x) > r + \varepsilon,\ \bar{f}(x) < r\} \tag{4.2}$$

имеет положительную меру. Множество (4.2) содержит компакт Q' положительной меры и для каждой точки $x \in Q'$ найдется функция $\tilde{\varphi} \in \Phi$ такая, что $\tilde{\varphi}(x) > r + \varepsilon$. Так как множество Q' компактно, можно выбрать конечное число функций $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_s \in \Phi$ таких, что для каждого $x \in Q'$ найдется $\tilde{\varphi}_k (k = 1, 2, \ldots, s)$, удовлетворяющая неравенству $\tilde{\varphi}_k(x) > r + \varepsilon$. Пусть ψ_k — функция из Φ, мажорирующая $\varphi_k \vee \tilde{\varphi}_1 \vee \ldots \vee \tilde{\varphi}_s$. Для всех $x \in Q'$ имеем $\psi_k(x) > r + \varepsilon > \bar{f}(x) + \varepsilon \geqslant \varphi_k(x) + \varepsilon$ и, кроме того, $\psi_k \geqslant \varphi_k$. Следовательно,

$$\alpha \geqslant \mu(\psi_k) \geqslant \mu(\varphi_k) + \varepsilon\mu(Q'). \tag{4.3}$$

Можно считать, что последовательность $(\mu(\psi_k))$ сходится. Так как $\lim\limits_k \mu(\psi_k)=\alpha$, то, переходя в (4.3) к пределу, получаем противоречие. Значит, $\mu(\mathrm{co}_H f)=\alpha$, что и требовалось доказать.

Установим основной результат этого пункта.

Теорема Харди — Литтлвуда — Полиа. *Пусть Q — метризуемое компактное пространство и H — минорирующий конус в $C(Q)$. Тогда H обладает свойствами (H. L. P.) и (R. L.).*

Доказательство. Пусть μ, ν — положительные меры из $C'(Q)$, причем $\mu \underset{H}{>} \nu$. Покажем, что μ является слабо измеримым H-распространением ν.

Определим функционал $\tilde{p}: C(Q) \to R$ формулой

$$\tilde{p}(f)=\int\limits_Q p_x(f)\,d\nu.$$

Отметим, прежде всего, что данное определение корректно, ибо функция $p(f)$ полунепрерывна снизу. Функционал $\tilde{p}$ супераддитивен и положительно однороден, что вытекает из предложения 4.1. Кроме того, функционал $\tilde{p}$ непрерывен, т. е. суперлинеен, так как

$$|\tilde{p}(f)| \leqslant \sup_{x\in Q}|p(f)(x)|\,\nu(Q) \leqslant \sup_x \|p_x\|\cdot\|f\|\,\nu(Q).$$

Используя предложение 4.3 и привлекая условие $\mu \underset{H}{>} \nu$, получаем

$$\mu(f) \geqslant \int\limits_Q p_x(f)\,d\mu = \mu(\mathrm{co}_H f) = \sup\{\mu(\varphi): \varphi\in P(H),\ \varphi \leqslant$$
$$\leqslant f\} \geqslant \sup\{\nu(\varphi): \varphi\in P(H),\ \varphi\leqslant f\} = \nu(\mathrm{co}_H f) = \tilde{p}(f).$$

Таким образом, функционал μ опорен к суперлинейному функционалу $\tilde{p}$. По теореме Штрассена, условия которой выполнены в силу предложения 4.2, найдется слабо измеримое отображение $x\to T_x$ компакта Q в совокупность борелевских мер $C'(Q)$ такое, что

$$\mu(f)=\int\limits_Q T_x(f)\,d\nu \quad (f\in C(Q))$$

и, кроме, того, функционал T_x опорен к функционалу p_x. В частности, для $f\geqslant 0$ имеем $p_x(f)\geqslant 0$, т. е. $T_x(f)\geqslant \tilde{p}_x(f)\geqslant$

$\geqslant 0$, а для всех $h \in H$ имеем $T_x(h) \geqslant p_x(h) = h(x)$. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 1. Не следует полагать, что существуют неминорирующие конусы H, обладающие свойством $(H.\ L.\ P.)$. В самом деле, если H — неминорирующий конус, то H не содержит внутренних точек конуса отрицательных функций. Отсюда, в частности, следует, что найдется положительная ненулевая мера μ такая, что $\mu \in H^*$. Так как для любой H-выпуклой функции f имеем $\mu(f) \geqslant \sup\limits_{h \in uf} \mu(h) \geqslant 0$, то $\mu \underset{H}{>} 0$. С другой стороны, если $\mu \underset{H}{\supset} 0$, то $\mu = 0$. Таким образом, теорема Харди—Литтлвуда — Полиа дает (в случае метризуемого компакта) необходимый и достаточный признак свойства $(H. L. P.)$.

Замечание 2. Выше было установлено, что свойством $(R.\ L.)$ обладает любой замкнутый конус H в $C(Q)$ (теорема 1.1). Теорема Харди — Литтлвуда — Полиа показывает, что условие замкнутости конуса H в метризуемом случае можно заменить требованием минорирования. Заметим также, что из замкнутости $P(H)$ не следует, вообще говоря, замкнутость H, в то же время, по предложению 1.3, если H — минорирующий конус, то конус $P(H)$ замкнут.

5°. Примеры декомпозиции. Здесь представлены типичные результаты, основанные на технике декомпозиций. Основное внимание уделено исследоваиию различных классов выпуклых множеств. При этом существенно используются сведения из геометрии выпуклых поверхностей (см. Приложение II).

Пример 5.1. Пусть Q — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства V, $A(Q)$ — совокупность непрерывных аффинных функций на Q (т. е. $A(Q) = \overline{V'|_Q + R}$). Относительно того, обладает ли конус $A(Q)$ свойством $(H. L. P.)$ или нет, в общем (не метрическом) случае ничего не известно. Однако, как и каждый замкнутый конус, $A(Q)$ обладает свойством Решетняка—Люмиса. Таким образом, имеет место

Теорема Картье — Фелла — Мейе. *Пусть μ, ν — положительные меры на Q. Тогда*

$$\int\limits_Q f d\mu \geqslant \int\limits_Q f d\nu$$

для любой выпуклой функции f в том и только в том случае, если

$$\mu \underset{A(Q)}{\gg} \nu.$$

Пример 5.2. Пусть $\mathfrak{B}_n$ — конус следов (вещественнозначных) сублинейных функционалов на сферу направлений Z_n (см. пункт 1.4). Сохраним символ R^n за подпространством следов на Z_n линейных функционалов над R^n. Это подпространство можно рассматривать как конус в $C(Z_n)$. Тогда $\mathfrak{B}_n = P(R^n, C(Z_n), \bar{R}^{Z_n})$. Конус R^n обладает свойством $(R.\ L.)$. Таким образом, получается следующая важная при исследовании экстремальных геометрических задач

Теорема 5.1. *Пусть μ, ν — положительные меры на Z_n. Неравенство*

$$\int_{Z_n} p d\mu \geqslant \int_{Z_n} p d\nu$$

справедливо для любого сублинейного функционала p в том и только в том случае, если

$$\mu \underset{R^n}{\gg} \nu.$$

На основе этой теоремы устанавливается следующий полезный в приложениях факт, формулировка и доказательство которого существенно опираются на сведения, изложенные в Приложении II.

Теорема 5.2. *Для каждой александровской меры μ найдутся последовательности (μ_m) и (ν_m) положительных дискретных мер, широко сходящиеся к μ, причем такие, что* $\mu_m \underset{R^n}{\gg} \mu \underset{R^n}{\gg} \nu_m$.

Доказательство. Установим только существование последовательности (μ_m), так как утверждение о существовании (ν_m) проверяется аналогичным способом.

По теореме Александрова определяется выпуклая поверхность $\mathfrak{x}$ такая, что μ — это поверхностная функция $\mu(\mathfrak{x})$ фигуры $\mathfrak{x}$. Применив теорему аппроксимации многогранниками, найдем последовательность многогранников $(\mathfrak{x}_m)$, сходящуюся к $\mathfrak{x}$, такую, что $2\mathfrak{x} \supset \mathfrak{x}_m \supset \mathfrak{x}$. Известно, что меры $\mu_m = \mu(\mathfrak{x}_m)$ дискретны, положительны и, кроме того, последовательность (μ_m) широко сходится к μ.

Покажем, что $\mu_m \underset{R^n}{\geqslant} \mu$. Для этого достаточно проверить, что $\mu_m(h) \geqslant \mu(h)$ для всех $h \in \mathfrak{B}_n$. Заметим, что

$$\mu_m(h) = nV_1(\mathfrak{x}_m, \mathfrak{x}_h);$$

$$\mu(h) = nV_1(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_h).$$

где $\mathfrak{x}_h$ — определенная по теореме Минковского—Фенхеля фигура с опорной функцией h, а V_1 — смешанный объем. В силу монотонности смешанного объема имеем $V_1(\mathfrak{x}_m, \mathfrak{x}_h) \geqslant V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_h)$. Теорема доказана.

Пример 5.3. Пусть H — замкнутый конус в пространстве R^n. Рассматривая элементы H как линейные функционалы над R^n и отождествляя линейный функционал с его следом на сферу направлений Z_n, будем считать H конусом в $C(Z_n)$. Можно показать, что (при стандартном отождествлении) конус $\mathfrak{B}(H)$ совпадает в данном случае с конусом всех выпуклых компактов, содержащихся в H.

Опишем поляру к конусу $\mathfrak{B}(H)$ (или, что то же самое, к $P(H)$). Использовать теорему Харди—Литтлвуда—Полиа в данной ситуации нельзя (как нетрудно видеть, H не обладает свойством $(H.\ L.\ P)$). Однако H обладает свойством Решетняка — Люмиса и поэтому требуемое описание дает теорема 1.1.

Приведем лишь одно геометрическое следствие этого факта.

Теорема 5.3. *Пусть $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}$ заданные выпуклые поверхности в R^n и H — подпространство R^n. Для любой выпуклой фигуры $\mathfrak{z}$, лежащей в H, имеет место неравенство*

$$V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{z}) \geqslant V(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}, \mathfrak{z})$$

в том и только в том случае, если

$$\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \underset{H}{\geqslant} \mu(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})$$

(здесь V и μ соответственно смешанный объем и смешанная поверхностная функция).

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{n} \int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1});$$

$$V(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{n} \int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}),$$

и применить теорему 1.1 (напомним, что $\mathfrak{z}$, в частности, функция $x \to \max_{l \in \mathfrak{z}}(l, x)$).

Пример 5.4. Пусть K — воспроизводящий замкнутый конус в R^n и N — совокупность следов на $K^* \cap Z_n$ элементов K, рассматриваемых как функционалы над R^n. Из примера 1.2.5 видно, что N-выпуклые множества отождествляются в данной ситуации с выпуклыми K^*-нормальными подмножествами K. Конус N не обладает свойством $(H.\ L.\ P.)$. Однако N обладает свойством $(R.\ L.)$, т. е. справедлива

Теорема 5.4. *Неравенство*

$$\int_{K^* \cap Z_n} U d\mu \geqslant \int_{K^* \cap Z_n} U d\nu$$

справедливо для любого выпуклого замкнутого K^*-нормального множества U из K в том и только в том случае, если

$$\mu \underset{N}{\geqslant} \nu.$$

Пример 5.5. Пусть пространство R^{n-1} реализовано как гиперподпространство R^n. Найдем функционалы, линейные относительно операций Минковского и положительные на множестве конических пирамид, основания которых лежат в R^{n-1}, а вершины на (ортогональном) луче $L = \{\alpha e_n : \alpha \geqslant 0\}$. По определению *коническая пирамида* является выпуклой оболочкой некоторого элемента $\widetilde{\mathfrak{B}}_{n-1}$ и точки луча L. (Здесь $\widetilde{\mathfrak{B}}_{n-1}$ есть множество выпуклых компактных подмножеств R^n, лежащих в гиперподпространстве R^{n-1}). Таким образом, применима теорема декомпозиции, т. е. справедлива

Теорема 5.5. *Пусть μ, ν — неотрицательные меры на Z_n. Неравенство*

$$\int_{Z_n} \mathfrak{x}\, d\mu \geqslant \int_{Z_n} \mathfrak{x}\, d\nu$$

имеет место для любой конической пирамиды в том и только в том случае, если для каждой меры $0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu$ найдется мера $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu$ такая, что $\mu_1 - \nu_1 \in \widetilde{\mathfrak{B}}^*_{n-1}$ и $(\mu - \mu_1)(e_n) \geqslant (\nu - \nu_1)(e_n)$.

Заметим, что поляра конуса $\widetilde{\mathfrak{B}}_{n-1}$ также может быть найдена с помощью техники декомпозиций (см. пример 5.3).

Пример 5.6. Назовем *m-эдром* многогранник в R^n, являющийся выпуклой оболочкой не более чем m точек. Пусть M_m — множество всех m-эдров. Обозначим через $\widetilde{M}_m$ коническую замкнутую оболочку множества M_m в пространстве выпуклых множеств. Элементы $\widetilde{M}_m$ называются *m-эдронами*. Таким образом, m-эдрон есть «непрерывная положительная комбинация m-эдров». В случае $m=2$ получаем известные полиэдроны (см. [64]), т. е. «непрерывные положительные комбинации отрезков». Ниже дается характеристика опорных функций m-эдронов.

Прежде всего, для любых точек $x_1, \ldots, x_p \in R^n$ и числа k через $S_k^m(x_1, \ldots, x_p)$ обозначим множество, определенное следующим образом. В $S_k^m(x_1, \ldots, x_p)$ входят наборы $(y_1, \ldots, y_k) \in (R^n)^k$ такие, что (1) $\sum_{s=1}^{k} y_s = \sum_{s=1}^{p} x_s$; (2) для любого разбиения множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ на m непересекающихся подмножеств $I_1, \ldots, I_m$ имеем $\sum_{j \in I_s} y_j \in [0, x_1] + \ldots + [0, x_p]$ для всех $s=1, \ldots, m$ (здесь $[0, x]$ — отрезок, соединяющий начало координат и точку x).

Теорема 5.6. *Выпуклая фигура $\mathfrak{x}$ является m-эдроном в том и только в том случае, если для любых точек $x_1, \ldots, x_p \in R^n$, числа k и крайнего элемента $(y_1, \ldots, y_k)$ множества $S_k^m(x_1, \ldots, x_p)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{s=1}^{p} \mathfrak{x}(x_s) \geqslant \sum_{s=1}^{k} \mathfrak{x}(y_s').$$

Эта теорема является развернутой формой следующего факта, непосредственно вытекающего из теоремы декомпозиции.

Теорема 5.7. *Пусть μ, ν — положительные меры. Неравенство*

$$\int_{Z_n} \mathfrak{x}\, d\mu \geqslant \int_{Z_n} \mathfrak{x}\, d\nu$$

справедливо для любого m-эдрона $\mathfrak{x}$ в том и только в том случае, если для всякого разбиения $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ меры ν найдется разбиение $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ меры μ такое, что $\mu_k(z) = \nu_k(z)$ для любого $z \in R^n$ $(k=1, \ldots, m)$.

Наметим доказательство теоремы 5.6. Ясно, что $\mathfrak{x} \in \widetilde{M}_m$ в том и только в том случае, если $\mu(\mathfrak{x}) \geqslant 0$ для всех

$\mu \in \widetilde{M}_m^*$. В силу теоремы 5.3 можно ограничиться дискретными мерами из $\widetilde{M}_m^*$. Применение декомпозиционного критерия к дискретиым мерам и приводит к теореме 5.6.

Следующие два примера посвящены приложению техники декомпозиции для изучения связей между операциями Минковского и операциями взятия выпуклой оболочки объединения и пересечения в конусе $\mathfrak{V}_n$ выпуклых компактов числового пространства. (Эти вопросы связаны, иапример, с интерполяционными теоремами [127]).

Пример 5.7. Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — выпуклые симметричные относительно нуля тела в R^n. *Пинскеровской оболочкой* $\pi(S_1, \ldots, S_m)$ множеств $S_1, \ldots, S_m$ называют наименьший замкнутый конус в пространстве выпуклых множеств $[\mathfrak{V}_n]$, содержащий $S_1, \ldots, S_m$ и, кроме того, замкнутый относительно операции взятия выпуклой оболочки объединения.

Напомним, что конус выпуклых компактов является условно полной структурой (гл. I, пункты 1°, 2°), причем инфимум ограниченного сиизу семейства (множеств) совпадает с пересечением, а супремум ограниченного сверху семейства с замыканием выпуклой оболочки объединеиия элементов этого семейства. В связи с этим, используется запись $\bigwedge\limits_\alpha U_\alpha$ вместо $\bigcap\limits_\alpha U_\alpha$ (если $\bigcap\limits_\alpha U_\alpha \neq \varnothing$) и $\bigvee\limits_\alpha U_\alpha$ вместо $\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha\right)$ (если $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ ограничено). Напомним, что, как было отмечено в главе I, пункт 4°, при рассмотрении пространства выпуклых множеств (и конуса выпуклых множеств в нем) отождествляются и обозначаются одним символом выпуклый компакт, его опорная функция и след этой функции на сфере направлений Z_n.

Теорема 5.8. *Выпуклая фигура $S\ (S \neq \{0\})$ входит в $\pi(S_1, \ldots, S_m)$ в том и только в том случае, если для любых не равных нулю одновременно векторов $x_1, \ldots, x_p \in R^n$ имеет место включение*

$$\frac{S}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^0}} \leqslant \frac{S_1}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^0}} \vee \ldots \vee \frac{S_m}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_m^0}}.$$

Доказательство разобъем на этапы, упомянутые перед теоремой 5.6, и проведем подробно для пояснения типичной идеи получения такого рода результатов.

Предложение 5.1. *Множество* $S \in \mathfrak{B}_n$ *входит в* $\pi(S_1, \ldots, S_m)$ *в том и только в том случае, если* $\mu(S) \geqslant \nu(S)$ *для всех положительных мер* μ *и* ν *таких, что для каждого разбиения* $\{\nu_1, \ldots, \nu_p\}$ *найдется разбиение* $\{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ *меры* μ, *обладающее тем свойством, что* $\mu_k(S_i) \geqslant \nu_k(S_i)$ $(i=1, \ldots, m; k=1, \ldots, p)$.

Доказательство. Множество $\pi(S_1, \ldots, S_m)$ — это замыкание конуса H-выпуклых функций, где $H = \left\{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k S_k : \alpha_k \geqslant 0\right\}$. Требуемый результат — это расшифровка тривиального соотношения

$$(S \in \pi(S_1, \ldots, S_m) \Leftrightarrow S \in (\pi(S_1, \ldots, S_m))^{**}).$$

Предложение 5.2. *Множество* $S \in \mathfrak{B}_n$ *входит в* $\pi(S_1, \ldots, S_m)$ *в том и только в том случае, если для любых векторов* $x_1, \ldots, x_p$, y *из* R^n *таких, что* $\sum_{k=1}^{p} S_i(x_k) \geqslant S_i(y)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ *выполняется неравенство* $\sum_{k=1}^{p} S(x_k) \geqslant S(y)$.

Необходимость следует из того факта, что

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k| \varepsilon_{\frac{x_k}{|x_k|}} - |y| \varepsilon_{\frac{y}{|y|}} \in (\pi(S_1, \ldots, S_m))^*.$$

(Здесь, как обычно, $|\cdot|$ — евклидова длина; если $x=0$, то по определению $\varepsilon_{\frac{x}{|x|}} = 0$.)

Достаточность. Пусть $\mu \underset{H}{\geqslant} \nu$. Заметим, что отображения

$$z \to \mu(z), \quad z \to \nu(z) \qquad (z \in (R^n)' = R^n)$$

есть линейные функционалы, так что при некоторых $u, v \in R^n$ имеем $\mu(z) = (u, z)$ и $\nu(z) = (v, z)$ для всех $z \in R^n$. Положим

$$\mu_1 = \mu + \mathrm{mes} + |u| \varepsilon_{-\frac{u}{|u|}} + |v| \varepsilon_{-\frac{v}{|v|}} = \bar{\mu}_1 + |v| \varepsilon_{-\frac{v}{|v|}};$$

$$\mu_2 = \nu + \mathrm{mes} + |v| \varepsilon_{-\frac{v}{|v|}} + |u| \varepsilon_{-\frac{u}{|u|}} = \bar{\mu}_2 + |u| \varepsilon_{-\frac{u}{|u|}},$$

где mes лебегова мера на Z_n. Отметим, что меры $\bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2$) являются александровскими. Проверим, например, что такова мера $\bar{\mu}_1$. Ее положительность и невырожденность очевидны. Покажем, что мера $\bar{\mu}_1$ инвариантна относительно сдвигов. В самом деле, для $i=1, \ldots, n$ имеем [1]

$$\int\limits_{Z_n} e_i d\bar{\mu}_1 = \int\limits_{Z_n} e_i d\mu + \int\limits_{Z_n} e_i d\,\mathrm{mes} - (e_i, u) = (e_i, u) - (e_i, u) = 0.$$

Применим к $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$ теорему 5.3 и найдем последовательности $(\bar{\mu}_i^t)$ ($i = 1, 2$) дискретных мер, широко сходящиеся к $\bar{\mu}_i$, причем такие, что $\bar{\mu}_1^t \underset{R^n}{\gg} \bar{\mu}_1$; $\bar{\mu}_2 \underset{R^n}{\gg} \bar{\mu}_2^t$. Положим

$$\mu_1^t = \bar{\mu}_1^t + |v|\, \varepsilon_{-\frac{v}{|v|}};$$

$$\mu_2^t = \bar{\mu}_2^t + |u|\, \varepsilon_{-\frac{u}{|u|}}.$$

Пусть $\tilde{S}$ — произвольный элемент $\pi(S_1, \ldots, S_m)$. Так как $\tilde{S} \in \mathfrak{B}_n$ и $\mu_1 \underset{H}{>} \mu_2$, то

$$\mu_1^t(\tilde{S}) = \bar{\mu}_1^t(\tilde{S}) + \tilde{S}(-v) \geqslant \bar{\mu}_1(\tilde{S}) + \tilde{S}(-v) = \mu_1(\tilde{S}) \geqslant$$
$$\geqslant \mu_2(\tilde{S}) + \tilde{S}(-u) \geqslant \bar{\mu}_2^t(\tilde{S}) + \tilde{S}(-u) = \mu_2^t(\tilde{S}).$$

Таким образом, по предложению 5.1 $\mu_1^t \underset{H}{\gg} \mu_2^t$; так как меры μ_1^t и μ_2^t дискретны, то взяв разбиение μ_2^t на точечные нагрузки и применив условия доказываемого предложения, найдем, что $\mu_1^t(S) \geqslant \mu_2^t(S)$. Поскольку μ_i есть широкий предел (μ_i^t), то $\mu_1(S) \geqslant \mu_2(S)$. Следовательно, $\mu(S) \geqslant \nu(S)$ для любых μ и ν таких, что $\mu \underset{H}{\gg} \nu$. В силу предложения 5.1 $S \in \pi(S_1, \ldots, S_m)$. Предложение доказано.

---

[1] Здесь и ниже $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис R^n, т. е.

$$e_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0).$$

Доказательство теоремы 5.8 немедленно следует из предложения 5.2 и формулы двойственности калибровочных и опорных функций.

Замечание. Попутно было доказано следующее важное свойство. Если H — конус в K-полулинеале $\mathfrak{B}_n$ выпуклых компактов числового пространства R^n, то множество дискретных мер широко плотно в H^*.

Представление, полученное в теореме 5.8, позволяет вывести ряд следствий. Например,

Следствие 1. *Выпуклая фигура S входит в $\pi(S_1, \ldots, S_m)$ в том и только в том случае, если*

$$S = \bigwedge_{(x_1,\ldots,x_p)\neq 0} \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^0} \left[\frac{S_1}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^0}} \vee \ldots \vee \frac{S_m}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_m^0}} \right], \tag{5.1}$$

где пересечение $\bigwedge$ берется по всем ненулевым наборам векторов $(x_1, \ldots, x_p) \in (R^n)^p$.

Доказательство. Если множество S допускает представление (5.1), то по теореме 5.8 $S \in \pi(S_1, \ldots, S_m)$. Наоборот, для каждого S из $\pi(S_1, \ldots, S_m)$ имеем

$$S \leqslant \bigwedge_{(x_1,\ldots,x_p)\neq 0} \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S^0} \left[\frac{S_1}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_1^0}} \vee \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \vee \frac{S_m}{\sum\limits_{k=1}^{p} \|x_k\|_{S_m^0}} \right] \leqslant \bigwedge_{x\neq 0} \|x\|_{S^0} \left[\frac{S_1}{\|x\|_{S_1^0}} \vee \ldots \vee \frac{S_m}{\|x\|_{S_m^0}} \right] = \tilde{S}.$$

Итак, $S \leqslant \tilde{S}$. С другой стороны, для каждого ненулевого вектора $z \in R^n$ имеем

$$S(z) \leqslant \tilde{S}(z) \leqslant \|z\|_{S^0} \left[\frac{S_1}{\|z\|_{S_1^0}} \vee \ldots \vee \frac{S_m}{\|z\|_{S_m^0}} \right] (z) = \|z\|_{S^0} = S(z).$$

Таким образом, $S = \tilde{S}$.

Замечание. Попутно было доказано, что каждый элемент $S \in \pi(S_1, \ldots, S_m)$ допускает представление

$$S = \bigwedge_{x\neq 0} \|x\|_{S^0} \left[\frac{S_1}{\|x\|_{S_1^0}} \vee \ldots \vee \frac{S_m}{\|x\|_{S_m^0}} \right]. \tag{5.2}$$

В частности, отсюда вытекает соотношение

$$S_1 + S_2 = \bigwedge_{x \neq 0} \left[\|x\|_{S_1^0} + \|x\|_{S_2^0}\right] \cdot \left[\frac{S_1}{\|x\|_{S_1^0}} \vee \frac{S_2}{\|x\|_{S_2^0}}\right],$$

которое следует рассматривать как уточнение предложения 1.6.3.

В дальнейшем через $\mathfrak{B}_n S$ обозначается множество, содержащее симметричные относительно нуля телесные выпуклые компакты, а также нулевое множество $\{0\}$ (т. е. множество всех шаров Минковского).

Следствие 2. *Пусть L замкнутое множество в $\mathfrak{B}_n S$, с любыми двумя элементами содержащее выпуклую оболочку их объединения, пересечение этих элементов и элемент $\alpha\mathfrak{x}$ $(\alpha \geqslant 0)$ вместе с любым своим элементом $\mathfrak{x}$. Тогда L является конусом.*

Пример 5.8. Представляет интерес развить технику, изложенную в предыдущем примере, для конусов, замкнутых относительно операции пересечения. Непосредственно применить теорему декомпозиции здесь нельзя, так как пересечению фигур не соответствует в общем случае поточечный минимум их опорных функций. Однако декомпозиционный подход с некоторыми модификациями приводит к нужному результату.

Предложение 5.2. *Пусть M — замкнутый конус в $\mathfrak{B}_n S$, замкнутый относительно $\bigwedge$ и такой, что множество*

$$S_y = \bigwedge_{\substack{S \in M \\ S \neq \{0\}}} \frac{S}{S(y)}$$

телесно (здесь y — ненулевой вектор из R^n). Неравенство $\sum_{k=1}^{m} S(x_k) \geqslant S(y)$ справедливо для всех $S \in M$ в том и только в том случае, если найдутся точки $z_1, \ldots, z_m$ такие, что $\sum_{k=1}^{m} z_k = y$ и, кроме того, $S(x_k) \geqslant S(z_k)$ для всех $S \in M$.

Доказательство. Нуждается в проверке лишь необходимость приведенного условия. Для простоты рассмотрим только случай, когда множество S_y телесно для любого ненулевого y. Положим $K = \max_{x \in S_y} |x|$ и, кроме того,

$$\mu_1 = |x_1| \, \varepsilon_{\frac{x_1}{|x_1|}}; \quad \mu_2 = \sum_{k=2}^{m} |x_k| \, \varepsilon_{\frac{x_k}{|x_k|}};$$

$$U=\Big\{(\nu_1,\nu_2)\in C'(Z_n)\times C'(Z_n):\nu_1\geqslant 0,\quad \nu_2\geqslant 0;$$

$$\|\nu_1\|,\|\nu_2\|\leqslant K;\quad \int\limits_{Z_n} l\,d(\nu_1+\nu_2)=(l,y)\,(l\in R^n)\Big\};$$

$$\breve{U}=U+M^*\times M^*.$$

Нетрудно проверить, что $\breve{U}$ непустое выпуклое широко замкнутое множество. Допустим, что $(\mu_1,\mu_2)\overline{\in}\breve{U}$. По теореме отделимости найдутся функции $S_1, S_2\in C(Z_n)$ такие, что

$$\mu_1(S_1')+\mu_2(S_2')<\nu_1(S_1')+\nu_2(S_2')+f_1(S_1')+f_2(S_2') \tag{5.2}$$

для всех $\nu_1,\nu_2\in U$ и $f_1,f_2\in M^*$. Отсюда следует, что $S_1', S_2'\in M$; $S_1', S_2'\neq\{0\}$. Положим

$$S_1=\frac{S_1'}{(S_1'\wedge S_2')(y)};\quad S_2=\frac{S_2'}{(S_1'\wedge S_2')(y)}.$$

Пусть V — некоторая грань в $S_1^0\vee S_2^0$, содержащая y, т. е. пересечение множества $S_1^0\vee S_2^0$ с некоторой гиперплоскостью, проходящей через точку y и выделяющей $S_1^0\vee S_2^0$. Найдем меру ν, сосредоточенную на множестве $\mathrm{ex}\,(V)$ крайних точек V и представляющую y, т. е. $\bar\nu\geqslant 0$, $\bar\nu(1)=1$ и $\bar\nu(l)=l(y)\,(y\in R^n)$ (см. [159]). Пусть $V_1=\mathrm{ex}\,(V)\cap S_1^0$; $V_2=\mathrm{ex}(V)\setminus V_1\,(V_2\subset S_2^0)$. Напомним, что в данной ситуации множество $\mathrm{ex}\,(V)$ — борелевское (см. [159]), а поэтому можно определить меры $\bar\nu_1=\bar\nu|_{V_1}$ и $\bar\nu_2=\bar\nu|_{V_2}$ — следы $\bar\nu$ на V_1 и V_2 соответственно. Будем рассматривать каждую функцию $f\in C(Z_n)$ как след положительно однородной функции на R^n и положим

$$\nu_1: f\to\int\limits_{\substack{\|z\|=1\\ S_1^0\vee S_2^0}} f\,d\bar\nu_1;$$

$$\nu_2: f\to\int\limits_{\substack{\|z\|=1\\ S_1^0\vee S_2^0}} f\,d\bar\nu_2;$$

$$\nu=\nu_1+\nu_2.$$

Тогда

$$\nu_1(1) = \int\limits_{\substack{\|z\|=1 \\ S_1^0 \vee S_2^0}} |z|\, d\bar{\nu}_1 \leqslant K; \quad \nu_2(1) \leqslant K,$$

так как $S_1^0 \vee S_2^0 \subset S_y^0$. Кроме того, для каждого линейного функционала l, имеем $\nu_1(l)+\nu_2(l)=\bar{\nu}(l)=l(y)$. Таким образом, $(\nu_1, \nu_2) \in U$. С другой стороны,

$$\nu(S_1 \wedge S_2) = \bar{\nu}(1) = \bar{\nu}_1(1) + \bar{\nu}_2(1) = \int\limits_{V_1} S_1(z)\, d\bar{\nu}_1 + \int\limits_{V_2} S_2(z)\, d\bar{\nu}_2 = \nu_1(S_1) + \nu_2(S_2).$$

Окончательно из (5.2) имеем:

$$\mu(S_1 \wedge S_2) \leqslant \mu_1(S_1) + \mu_2(S_2) < \nu_1(S_1) + \nu_2(S_2) = \nu(S_1 \wedge S_2) \leqslant \mu(S_1 \wedge S_2).$$

Полученное противоречие означает, что $(\mu_1, \mu_2) \in \widehat{U}$. Продолжая проведенный процесс по индукции (именно здесь используется сделанная в начале доказательства оговорка), найдем меры $\nu_1, \ldots, \nu_m$ такие, что $|x_k|\, \varepsilon_{\frac{x_k}{|x_k|}} - \nu_k \in M^*$ и, кроме того, $\sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k(l) = (l, y)$ для всех $l \in R^n$. Обозначим через z_k точку, представляющую ν_k, т. е. такую, что $\nu_k(l) = (l, z_k)$.

По теореме декомпозиции $\nu_k(S) \geqslant |z_k|\, \varepsilon_{\frac{z_k}{|z_k|}}(S) = S(z_k)$ для всех $S \in M$. Таким образом, $z_1, \ldots, z_m$ — требуемый набор. Предложение доказано.

В качестве приложения этого предложения выводится, например,

Теорема 5.9. *Пусть H — замкнутый конус в $\mathfrak{B}_n S$, замкнутый относительно $\wedge$, причем для всякого ненулевого y из R^n множество $S_y = \bigwedge\limits_{S \in H,\, S \neq \{0\}} \frac{S}{S(y)}$ телесно. Тогда множество $\pi(H)$ замкнуто относительно операции $\wedge$, причем ненулевое множество S из $\mathfrak{B}_n$ входит в $\pi(H)$ в том и только в том случае, если*

$$S = \bigwedge_{x \neq 0} S(x) \bigvee_{S_0 \in H} \frac{S_0}{S_0(x)}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Очевидно, что каждый элемент $S \in \pi(H)$ допускает представление (5.3) (см. представление (5.2)). Пусть S дано в виде (5.3) и $\sum_{k=1}^{p} S_0(x_k) \geqslant S_0(y)$ для всех $S_0 \in H$. В силу теоремы декомпозиции, следует показать, что $\sum_{k=1}^{p} S(x_k) \geqslant S(y)$. Поскольку конус H замкнут относительно операции $\wedge$ и S_y телесное множество, то по предложению 5.2 найдутся векторы $z_1, \ldots, z_p$ такие, что $\sum_{k=1}^{p} z_k = y$ и $S_0(x_k) \geqslant S_0(z_k)$ для всех S_0 из H. Так как S допускает представление (5.2), то $S(x_k) \geqslant S(z_k)$, следовательно, $\sum_{k=1}^{p} S(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{p} S(z_k) \geqslant S\left(\sum_{k=1}^{p} z_k\right) = S(y)$. Итак, $S \in \pi(H)$.

Докажем, что $\pi(H)$ замкнуто относительно $\wedge$. Пусть $S_1, S_2 \in \pi(H)$. По указанному выше $S \in \pi(H)$, если и только если $S(x) \geqslant S(y)$ для всех x, y таких, что $S_0(x) \geqslant S_0(y)$ для всех $S_0 \in H$. Итак, пусть $S_0(x) \geqslant S_0(y)$ для всех $S_0 \in H$. Рассмотрим $(S_1 \wedge S_2)(x)$. Нетрудно показать, что найдутся векторы $x_1, \ldots, x_p$ такие, что $\sum_{k=1}^{p} x_k = x$ и, кроме того, $(S_1 \wedge S_2)(x) = \sum_{k=1}^{t} S_1(x_k) + \sum_{k=t+1}^{p} S_2(x_k)$ (сравиите предложение 5.2).

Для всякого S_0 из H имеем

$$\sum_{k=1}^{p} S_0(x_k) \geqslant S_0\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = S_0(x) \geqslant S_0(y).$$

Следовательно, найдутся $z_1, \ldots, z_p$ из R^n, такие, что $\sum_{k=1}^{p} z_k = y$ и, кроме того, $S_0(x_k) \geqslant S_0(z_k)$ для S_0 из H и $k=1, \ldots, p$. Имеем $S_1(x_k) \geqslant S_1(z_k)$ и $S_2(x_k) \geqslant S_2(z_k)$, таким образом,

$$(S_1 \wedge S_2)(x) = \sum_{k=1}^{t} S_1(x_k) + \sum_{k=t+1}^{p} S_2(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{t} S_1(z_k) +$$

$$+ \sum_{k=t+1}^{p} S_2(z_k) \geqslant \sum_{k=1}^{p} (S_1 \wedge S_2)(z_k) \geqslant (S_1 \wedge S_2)\left(\sum_{k=1}^{p} z_k\right) =$$

$$= (S_1 \wedge S_2)(y).$$

Итак, $S_1 \wedge S_2$ входит в $\pi(H)$. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Пусть S_1 и S_2 — шары из $\mathfrak{B}_n S$, а $Q(S_1, S_2)$ наименьший замкнутый конус в $\mathfrak{B}_n S$, содержащий S_1 и S_2 и замкнутый относительно операции $\wedge$. Тогда наименьшей замкнутой подструктурой M (S_1, S_2) в $\mathfrak{B}_n$, содержащей S_1 и S_2, является множество $\pi(Q(S_1, S_2))$. При этом ненулевое S входит в $M(S_1, S_2)$ в том и только в том случае, если*

$$S = \bigwedge_{x \neq 0} S(x) \bigvee_{S_0 \in Q(S_1, S_2)} \frac{S_0}{S_0(x)}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что множество $S_y = \bigwedge_{\substack{S_0 \in Q(S_1, S_2) \\ S_0 \neq \{0\}}} \frac{S_0}{S_0(y)}$ телесно для всякого y, неравного нулю. В самом деле, тогда $\pi(Q(S_1, S_2)) \supset M(S_1, S_2)$. С другой стороны, очевидно, что $\pi\ (Q(S_1, S_2)) \subset M(S_1, S_2)$. Не нарушая общности, будем считать, что множества S_1 и S_2 телесны. Пусть для определенности $\|y\|_{S_1^0} \geqslant \|y\|_{S_2^0}$. Возьмем точку $z' \in$ $\in S_1 \wedge S_2$, положим $z = z'/\|y\|_{S_1^0}$ и рассмотрим линейный оператор $y \otimes z : x \to (y, x) z$. Заметим, что для всякого линейного оператора $A : R^n \to R^n$ и любого множества $S \in M(S_1, S_2)$ имеет место интерполяционное свойство (см. [44, 127])

$$\|A\|_S \leqslant \|A\|_{S_1} \vee \|A\|_{S_2}. \tag{5.4}$$

(Здесь используется символ $\|\cdot\|_S$ для обозначения операторной нормы, т. е. функции $A \to \|A\|_S = \sup\{\|Ax\|_S : : x \in S\}$. Доказательство соотношения (5.4) легко усмотреть из следующих геометрических условий: если $AS_1' \subset$ $\subset S_1'$ и $AS_2' \subset S_2'$, то $A(S_2' \vee S_2') \subset S_1' \vee S_2'$; $A(S_1' \wedge S_2') \subset$ $\subset S_1' \wedge S_2'$; $A(S_1' + S_2') \subset S_1' + S_2'$). В частности, ввиду того, что

$$\|y \otimes z\|_S = \sup_{x \in S} \|(y, x) z\|_S = \sup_{x \in S} |(y, x)|\ \|z\|_S = \|y\|_{S^0} \cdot \|z\|_S,$$

из соотношения (5.4) получим

$$\|y\|_{S^0} \|z\|_S \leqslant \|y \otimes z\|_{S_1} \vee \|y \otimes z\|_{S_2} = \|y\|_{S_1^0} \|z\|_{S_1} \vee \|y\|_{S_2^0} \|z\|_{S_2}. \tag{5.5}$$

Заметим, что по определению y и z справедливы соотношения

$$\|y\|_{S_1^0}\|z\|_{S_1} = \|y\|_{S_1^0}\frac{\|z'\|_{S_1}}{\|y\|_{S_1^0}} \leqslant \|z'\|_{S_1\wedge S_2} \leqslant 1;$$

$$\|y\|_{S_2^0}\|z\|_{S_2} = \|y\|_{S_2^0}\frac{\|z'\|_{S_2}}{\|y\|_{S_1^0}} \leqslant \|z'\|_{S_1\wedge S_2} \leqslant 1.$$

Таким образом, из (5.5) получаем, что для всякого $S \in M(S_1, S_2)$ точка $\|y\|_{S^0} z$ входит в S. Следовательно, $S_1 \wedge S_2 \subset \|y\|_{S^0} S_y$.

6°. Простейшие примеры H-распространений. Здесь будут рассмотрены несколько простых и важных конусов, обладающих свойством Харди — Литтлвуда — Полиа. Более тонкие и сложные примеры применения техники распространений приводятся в гл. III.

Пример 6.1. Пусть H — замкнутый или минорирующий конус в R^n; векторы f, g положительны, причем $g \neq 0$.

Теорема 6.1. *Вектор f H-следует за вектором g в том и только в том случае, если найдутся положительные векторы $l_1, \ldots, l_n$ такие, что $l_k - e_k \in H^*$ $(k = 1, \ldots, n)$ и, кроме того,*

$$f = \sum_{k=1}^{n} (g, e_k)\, l_k$$

($e_1, \ldots, e_n$ — *канонический базис* R^n):

Для доказательства достаточно заметить, что векторы $l_1, \ldots, l_n$ обладают указанными в теореме свойствами в том и только в том случае, если найдется $T \in \mathrm{Spr}(E, H)$, для которого $l_k = T^* e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Существование такого оператора было показано в пункте 2^0 для замкнутого и в пункте 4^0 для минорирующего конусов.

Пример 6.2. Пусть Q — метризуемый компакт в локально выпуклом пространстве X. Через A, как обычно, обозначим множество непрерывных аффинных функций на Q. Множество $P(A)$ совпадает с совокупностью всех непрерывных выпуклых на Q функций.

Теорема Харди — Литтлвуда — Полиа — Блекуэлла — Штейна — Шермана — Картье. *Пусть μ, ν — положительные меры из $C'(Q)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mu(f) \geqslant \nu(f)$ *для любой непрерывной выпуклой функции* f;

(2) μ *является слабо измеримым* A*-распространением* ν.

Следствие. *Функция* $f \in C(Q)$ *выпукла в том и только в том случае, если* $Tf \geqslant f$ *для любого монотонного оператора* T, *действующего из* $C(Q)$ *в пространство ограниченных измеримых по Борелю функций и такого, что* $Th = h$ *для любой аффинной функции* h.

Отметим, что из теоремы 2.1 следует менее тонкое условие.

Предложение 6.1. *Функция* $f \in C(Q)$ *выпукла в том и только в том случае, если* $Tf \geqslant f$ *для любого монотонного оператора* T: $C(Q) \to B(Q)$ *такого, что* $Th = h$ $(h \in A)$.

Пример 6.3. Пусть K — конус с выпуклым компактным метризуемым основанием σ в локально выпуклом пространстве X (т. е. $\sigma = \{x \in K : l(x) = 1\}$, где l — некоторый элемент X'). Через L обозначим совокупность следов линейных над X функционалов на σ. Множество L является векторным подпространством в C (σ), содержащим единицу (элемент **1** является следом функционала l, определяющего основание σ), и потому L обладает свойством (*H. L. P.*). Кроме того, выше было показано (см. пример 1.2.3), что множество $P(L) = P(L, C(\sigma))$ состоит из всех непрерывных сублинейных функционалов, определенных на K (точнее, из следов этих функционалов на σ). Таким образом, устанавливается следующий факт.

Теорема 6.2. *Пусть* K — *конус с компактным метризуемым основанием* σ. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mu(p) \geqslant \nu(p)$ *для любого непрерывного сублинейного функционала* p, *определенного на* K;

(2) μ *является слабо измеримым* L*-распространением (по конусу* L *следов линейных функционалов на* σ*)*.

Пример 6.4. Пусть H — минорирующий замкнутый конус в $C(Q)$, где Q — метрический компакт, и $S(H)$ — наименьший замкнутый конус в $C(Q)$, являющийся структурой и содержащий H. Ввиду того, что в $C(Q)$ выполняются бесконечные дистрибутивные законы [41], конус $S(H)$ может быть получен как совокупность всех $P(H)$-вогнутых функций.

Теорема 6.3. *Пусть* μ, ν *положительные меры из* $C'(Q)$. *Тогда* $\mu-\nu\in(S(H))^*$ *в том и только в том случае, если для всякого разбиения* $\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$ *меры* μ *найдутся разбиение* $\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}$ *меры* ν *и слабо измеримые операторы* $T_k\in\mathrm{Spr}(E, H)$ $(k=1, \ldots, n)$ *такие, что* $\mu_k(f)=\nu(Tf)$ $(f\in C(Q))$.

Доказательство. Конус $P(H)$ замкнут по предложению 2.5. Следовательно, $\mu-\nu\in(S(H))^*$ в том и только в том случае, если для всякого разбиения меры μ найдется разбиение меры ν такое, что $\mu_k-\nu_k\in(P(H))^*$. Так как H — минорирующий конус, то H обладает свойством $(H.\ L.\ P.)$, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае произвольного компакта можно дать описание поляры к конусу $S(H)$, например, в терминах декомпозиций.

Пример 6.5. Пусть Q — выпуклый компакт в л. в. п. X и L — конус следов элементов X' на Q. Пусть $P(L)$ — конус L-выпуклых функций. (Эти функции называются сублинейными на Q).

Можно показать, что дискретные меры плотны в конусе $[P(L)]^*$. Таким образом, замечая, что конус $P(L)$ замкнут, получаем $p\in P(L)$ в том и только в том случае, если $\nu(p)\geqslant 0$ для любой дискретной меры $\nu\in\in[P(L)]^*$. Представим ν в виде разности ненулевых положительных дискретных мер $\nu=\nu_1-\nu_2$. Из пункта 2° видно, что найдется монотонный слабо измеримый оператор T: $C(Q)\to B(Q)$ такой, что $Th\geqslant h$ $(h\in L)$ и $\nu_1(f)=\nu_2(Tf)$ для всех $f\in C(Q)$. Иными словами, имеет место

Предложение 6.2. *Функция* $p\in C(Q)$ *является сублинейной на* Q *в том и только в том случае, если* $Tp\geqslant p$ *для любого положительного оператора* $T: C(Q)\to B(Q)$ *такого, что* $Th=h$ *для всякого линейного функционала* h.

Таким образом, в данном случае, хотя конус L, вообще говоря, неминорирующий, но аналог теоремы 2.1 имеет место. Подведем итог сказанному следующей общей теоремой.

Теорема 6.4. *Пусть* H — *замкнутый конус в* $C(Q)$, *причем такой, что конус* $P(H)$ *замкнут и дискретные меры плотны в* $(P(H))^*$. *Функция* f *является* H-*выпуклой в том и только в том случае, если* $Tf\geqslant f$ *для всех* $T\in\mathrm{Spr}\,(E, H)$.

7°. *H*-максимальные меры. В этом пункте познакомимся с элементами теории Шоке для H-выпуклых функций. Исторически эта теория возникла из проблемы выметания в теорий потенциала, однако, для нас теория Шоке представляет интерес, главным образом, в связи с тем, что развиваемый в ней подход приводит к одному важному способу задания H-выпуклых функций.

Основной вопрос теории Шоке — это задача об интегральном представлении точек выпуклого (или, в нашем случае, H-выпуклого) компакта с помощью вероятностных мер, сосредоточенных на крайних точках этого компакта. Излагаемые ниже результаты частично могут быть извлечены из классической теории Шоке, однако, предпочтительнее прямой путь, основанный на использовании супремальных конструкций.

Аппаратом теории Шоке являются так называемые максимальные меры, т. е. меры, сосредоточенные на крайних точках выпуклого компакта. В рассматриваемой ситуации под *H-максимальной мерой* (где H — некоторый конус в $C(Q)$) понимается мера, максимальная относительно упорядоченности $\overset{\gg}{H}$ в множестве положительных мер, где $\mu\overset{\gg}{H}\nu$ означает, что $\mu-\nu\in H^*$ $(\overline{H-H}=C(Q))$.

Теорема 7.1. *На конусе H существуют H-максимальные меры в том и только в том случае, если конус H минорирующий, при этом для каждой меры найдется мажорирующая ее H-максимальная мера.*

Необходимость. Пусть μ есть некоторая H-максимальная мера и конус H не пересекается с внутренностью конуса отрицательных функций в $C(Q)$. Найдется ненулевая мера ν такая, что $\nu(h)\geqslant 0$ для всех $h\in H$ и, кроме того, $\nu(f)\leqslant 0$ для всех $f\leqslant 0$. Следовательно, $\nu\geqslant 0$. С другой стороны, $(\mu+\nu)(h)\geqslant\mu(h)$ для всех $h\in H$. В силу H-максимальности μ имеем $\mu+\nu=\mu$, т. е. $\nu=0$. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $\nu\geqslant 0$. Положим $S=\{\mu':\mu'\overset{\gg}{H}\nu\}$. Так как конус H минорирующий, то в H существует сильно отрицательный элемент f_H. Для него найдется число $\lambda>0$ такое, что $\mathbf{1}\leqslant-\lambda f_H$ и, следовательно, $\mu'(\mathbf{1})\leqslant\lambda\mu'(-f_H)\leqslant\lambda\nu(-f_H)$ при $\mu'\in S$. Таким образом, множество S слабо компактно. Пусть T — произвольная цепь в S (в упорядочении $\overset{\gg}{H}$). Рассмотрим T как сеть по множеству индексов T. Ввиду компактности S найдется мера $\bar{\mu}\in S$, являющаяся пределом широко сходящейся подсети T. Мера μ есть верхняя грань T. Таким образом, каждая цепь в S ограничена сверху и по лемме Цорна в S есть максимальный элемент μ. Мера μ является требуемой H-максимальной мерой.

Теорема 7.2. *Пусть H — конус в $C(Q)$. Мера μ является H-максимальной в том и только в том случае, если для каждой функции $f \in C(Q)$ справедливо соотношение*

$$\mu(f) = \sup_{h \leqslant f, h \in H} \mu(h).$$

Необходимость. Пусть μ является H-максимальной мерой. По теореме 7.1 конус H минорирующий и, следовательно, на $C(Q)$ определен конечный функционал $q(f) = \sup \mu(U_f)$.

Очевидно, что функционал q суперлинеен и, следовательно, является нижней огибающей опорных к нему функционалов. Если $\nu(f) \geqslant q(f)$ для всех $f \in C(Q)$, то $\nu \geqslant 0$ и, кроме того, $\nu(h) \geqslant q(h) = \mu(h)$ при $h \in H$. Итак, $\nu = \mu$, т. е. $q(f) = \mu(f)$ для всех $f \in C(Q)$.

Достаточность. Пусть $\nu(h) \geqslant \mu(h)$ для всех $h \in H$. Тогда для каждого $h \in U_f$ имеем $\nu(f) \geqslant \nu(h)$, так что

$$\nu(f) \geqslant \sup_{h \leqslant f, h \in H} \nu(h) \geqslant \sup_{h \leqslant f, h \in H} \mu(h) = \mu(f).$$

В силу произвольности f, меры ν и μ совпадают, что и означает H-максимальность μ. Теорема доказана[1].

Анализируя доказательство теоремы 7.2, приходим к следующему важному в приложениях способу задания H-выпуклых функций.

Принцип сохранения неравенств. *Функция f является H-выпуклой относительно минорирующего конуса H в том и только в том случае, если для всякой точки $z \in Q$ и меры μ такой, что $\mu \geqslant 0$ и $\mu(h) \geqslant h(z)$ $(h \in H)$, выполняется неравенство $\mu(f) \geqslant f(z)$.*

В пункте 2° было показано, как H-выпуклые функции можно задавать с помощью свойства сохранения операторных неравенств (теорема 2.1). В следующем пункте будет продолжено изучение этого вопроса.

Знакомясь с теорией Шоке, следует помнить, что для функции f из $C(Q)$ символом $\mathrm{co}_H(f)$ обозначается

---

[1] Сравните с теоремой 2.1.

отображение $x \to \sup\{h(x) : h \in U_f\}$ $(= \sup\{\varphi(x) : \varphi \leqslant f,$ $\varphi \in P(H)\})$.

Теорема Макободского. *Мера* μ *максимальна относительно конуса* H*-выпуклых функций* $P(H)$ *в том и только в том случае, если* $\mu(f) = \mu(\mathrm{co}_H f)$ *для каждой непрерывной функции* f.

Необходимость. По теореме 7.1 и предложению 4.3 имеем:

$$\mu(f) = \sup_{\varphi \leqslant f, \varphi \in P(H)} \mu(\varphi) = \mu(x \to \sup\{\varphi(x) : \varphi \leqslant f,$$

$$\varphi \in P(H)\}) = \mu(x \to \sup\{h(x) : h \leqslant f,\ h \in H\}) = \mu(\mathrm{co}_H f).$$

Достаточность. Если $\mu(\mathrm{co}_H f) = \mu(f)$, то

$$\mu(f) = \mu(x \to \sup\{\varphi(x) : \varphi \leqslant f,\ \varphi \in P(H)\}) =$$

$$= \sup_{\varphi \leqslant f, \varphi \in P(H)} \mu(\varphi).$$

Следовательно, по теореме 7.2 мера μ является $P(H)$-максимальной.

Введем следующее определение. Будем говорить, что точка z принадлежит *границе Шоке*[1] $\mathrm{Ch}(H)$ конуса H, если $\mathrm{co}_H f(z) = f(z)$ для любой функции $f \in C(Q)$. По теореме Макободского это означает, что точка $z \in \mathrm{Ch}(H)$ в том и только в том случае, если мера ε_z является $P(H)$-максимальной (или, что то же самое, H-максимальной).

Граница Шоке является одним из фундаментальных понятий функционального анализа. Термины «минимальная кольцевая граница», «граница Мартина», «множество регулярности» и т. д. — это, в известном смысле, синонимы слов «граница Шоке» (для соответствующего конуса). Ниже граница Шоке будет изучена более детально. Здесь только укажем, что точка границы Шоке — это аналог крайней точки выпуклого компакта. Именно, по теореме Бауэра [7] граница Шоке подпространства аффинных функций на выпуклом компакте в локально выпуклом пространстве совпадает с множеством крайних точек этого компакта.

Теорема Шоке о строении максимальных мер выглядит особенно просто для метризуемых компактов. В об-

---

[1] Правильнее говорить «граница Мильмана — Шоке» (см., например, [124]), однако термин «граница Шоке» более употребителен.

щем случае возникают трудности, преодоление которых требует более тонких топологических рассмотрений. Дело в том, что в неметризуемом случае множество крайних точек компакта не обязано быть борелевским, а потому теряет смысл фраза «мера сосредоточена на множестве крайних точек». Поэтому для простоты ограничимся случаем, в известном смысле похожим на метрический. Прежде всего, введем нужные определения.

Непрерывная функция f называется *выделяющей* $\mathrm{Ch}(H)$, если f не является H-выпуклой функцией в точках дополнения границы Шоке $\mathrm{Ch}(H)$ (напомним, что H-выпуклость является локальным понятием), иными словами, если $\mathrm{Ch}(H)=\{z\in Q\colon \mathrm{co}_H f(z)=f(z)\}$.

Конус H называют *конусом Шоке*, если его граница Шоке является борелевским множеством и существует выделяющая $\mathrm{Ch}(H)$ функция.

Теорема Шоке. *Пусть H — конус Шоке. Тогда $P(H)$-максимальные меры сосредоточены на границе Шоке* $\mathrm{Ch}(H)$; *при этом для каждой точки $z\in Q$ существует мера μ, сосредоточенная на границе Шоке* $\mathrm{Ch}(H)$ *и такая, что $\mu(h)\geqslant h(z)$ для всех $h\in H$.*

Доказательство. Пусть μ является $P(H)$-максимальной мерой. По теореме Макободского $\mu(f)=\mu(\mathrm{co}_H f)$, где f — функция, выделяющая $\mathrm{Ch}(H)$. Если бэровское множество A лежит в $Q\setminus\mathrm{Ch}(H)$, то, поскольку $\mathrm{Ch}(H)=\{z\in Q\colon \mathrm{co}_H f(z)=f(z)\}$, $\mu(A)=0$. Следовательно, мера μ сосредоточена на борелевском множестве $\mathrm{Ch}(H)$.

Вторая часть теоремы доказывается несколько сложнее. Так как граница Шоке конуса H не пуста, то H — минорирующий конус. Значит, по теореме 7.1 найдется H-максимальная мера μ такая, что $\mu H \varepsilon_z$. По приведенному доказательству μ сосредоточена на $\mathrm{Ch}(H)$. Теорема доказана полностью.

Замечание. Теорема Шоке дает исчерпывающую характеристику максимальных мер. Дело в том, что мера, носитель которой содержится в границе Шоке конуса H, заведомо является $P(H)$-максимальной (по теореме Макободского).

Классическая теорема Шоке выводится из приведенного результата, если в качестве функции, выделяющей множество крайних точек, взять произвольную строго вогнутую функцию, существование которой равносильно метризуемости исходного пространства (см. [159]).

Полученные результаты применим к изучению выпуклых по Фаню множеств. Пусть Y — топологическое пространство, H — содержащий константы конус непрерывных на Y функций, а Q — компактное H-выпуклое (по Фаню) множество. Иначе,

$$Q=\left\{z\in Y: h(z)\leqslant \sup_{x\in Q} h(x) \quad \text{для всех } h\in H\right\}.$$

Предложение 7.1. $Q=\{z\in Y: \exists\, \mu\geqslant 0: \mu(h)\geqslant h(z)\ (h\in H)\}$.

Доказательство. Если $h(z)\leqslant\mu(h)$ для всех $h\in H$, то

$$h(z)\leqslant \sup_{x\in Q} h(x)\cdot\mu(1)=\sup_{x\in Q} h(x).$$

Существование нужной меры для каждой точки Q следует из теоремы 7.1.

Теорема Фаня. *Пусть Q есть компактное H-выпуклое по Фаню множество, причем H — конус Шоке. Тогда Q является H-выпуклой оболочкой границы Шоке, т. е.*

$$Q=\{z\in Y: h(z)\leqslant \sup_{x\in \mathrm{Ch}(H)} h(x) \text{ для всех } h\in H\}.$$

Доказательство. Включение $\{z\in Y: h(z)\leqslant \sup h(\mathrm{Ch}(H))\}\subset Q$ очевидно. Пусть $z\in Q$. Тогда по теореме Шоке найдется сосредоточенная на $\mathrm{Ch}(H)$ мера μ такая, что $\mu(h)\geqslant h(z)$ для всех $h\in H$, т. е. $h(z)\leqslant \sup h(\mathrm{Ch}(H))$. Теорема доказана.

Следствие. *Если Q — компактное пространство и H — конус Шоке, то* $\sup h(Q)=\sup h(\mathrm{Ch}(H))$ *для любой функции $h\in H$.*

Доказательство. По теореме Фаня Q является H-выпуклой оболочкой $\mathrm{Ch}(H)$, т. е. $h(z)\leqslant \sup\limits_{x\in\mathrm{Ch}(H)} h(x)$ для любого $z\in Q$ и $h\in H$.

Введем в заключение одно полезное в приложениях понятие. Множество $B\subset Q$ называется *границей конуса* $H\subset C(Q)$, если $\sup h(B)=\sup h(Q)$ для всех $h\in H$.

Предложение 7.2. *Граница Шоке* $\mathrm{Ch}(H)$ *содержится в любой замкнутой границе конуса H.*

Доказательство. Допустим противное, тогда найдется точка $y\in\mathrm{Ch}(H)$, не принадлежащая некоторой замкнутой границе B. Пусть U — открытая окрестность точки y, не пересекающаяся с B. По теореме Урысона о полной регулярности компактного пространства найдется функция $\varphi \in C(Q)$ такая, что $\varphi(y)=1$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всех $x \in Q$ и $\varphi(z)=0$ для $z \in Q \setminus U$. Так как точка $y \in \mathrm{Ch}(H)$, то $\varphi(y)=\mathrm{co}_H\, \varphi(y)$, т. е. найдется функция $h \in H$ такая, что $h \leqslant \varphi$ и $h(y) > \varphi(y) - \frac{1}{2} > 0$. Тогда $\sup h(Q) \geqslant \sup h(U) > 0$, с другой стороны, $h(z) \leqslant 0$ для всех $z \in B$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Границей Шилова конуса H называют замыкание границы Шоке конуса H.

Теорема 7.3. *Если граница Шоке конуса H является границей конуса H, то граница Шилова конуса H является минимальной замкнутой границей этого конуса.*

Доказательство. Очевидно, что замыкание множества, являющегося границей, также будет границей. С другой стороны, по предложению 7.2 граница Шилова содержится в любой замкнутой границе конуса H.

Следствие 1. *Граница Шилова конуса Шоке H, содержащего -1, является минимальной замкнутой границей этого конуса.*

Следствие 2. *Если H — это содержащее единицу замкнутое подпространство $C(Q)$, разделяющее точки из Q, то граница Шоке $\mathrm{Ch}(H)$ является границей H.*

Доказательство. Пусть h — произвольный элемент H. Известно [159], что найдется точка $x \in \mathrm{Ch}(H)$ такая, что $h(x)=\sup h(Q)$. Так как $\sup h(\mathrm{Ch}(H)) \geqslant h(x)$ и, с другой стороны, $\sup h(\mathrm{Ch}(H)) \leqslant \sup h(Q)$, то $\mathrm{Ch}(H)$ — граница H.

Следствие 3. *В условиях следствия 2 граница Шилова это наименьшее замкнутое множество B, обладающее тем свойством, что для всякой функции $h \in H$ найдется точка $z \in B$ такая, что $|h(z)| = \|h\|$.*

Приведем пример конуса, границы Шоке и Шилова которого не являются границами этого конуса.

Пример 7.1. Пусть $Q=\{x \in R^2_+ : |x|=1\}$, H — конус следов линейных функционалов над R^2 на Q. Граница Шоке этого конуса состоит из двух точек e_1 и e_2. С другой стороны, функция $h_0: x \to x_1+x_2$ обладает тем свойством, что $\max h_0(Q)=|e_1+e_2|=\sqrt{2}$.

С дальнейшими свойствами границ Шоке и Шилова подпространств $C(Q)$ можно познакомиться в главе VI монографии Фелпса [159] и в статье Бауэра [7].

8°. Операторы, сохраняющие неравенства. В пункте 7° был рассмотрен один способ задания H-выпуклых функций в случае минорирующего конуса H, именно — принцип сохранения неравенств. Ранее (в пункте 3°) подобное свойство было отмечено для операторов. Было показано, что функция f является H-выпуклой в том и только в том случае, если для любого оператора $T \in \mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$ такого, что $Th \geqslant h$ для всех $h \in H$, выполняется неравенство $Tf \geqslant f$. Представляет интерес выяснить, какие операторы, кроме тождественного, обладают тем же свойством, т. е. таковы, что $\operatorname{Spr}(T, H) = \operatorname{Spr}(T, P(H))$. Подобные операторы можно назвать *сохраняющими неравенства.*

Опишем различные положительные *меры, сохраняющие неравенства* (H-выпуклости), т. е. меры ν такие, что из условия $\mu(h) \geqslant \nu(h)$ для всех $h \in H$ следует выполнение условия $\mu(f) \geqslant \nu(f)$ для всех $f \in P(H)$. Иными словами, ν сохраняет неравенства, если $\operatorname{Spr}(\nu, H) = \operatorname{Spr}(\nu, P(H))$.

Повторив рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 7.2, получаем для минорирующего конуса H следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Мера ν сохраняет неравенства в том и только в том случае, если для всех $f \in P(H)$ справедливо равенство*

$$\nu(f) = \sup_{h \leqslant f, h \in H} \nu(h).$$

Обозначим через M множество сохраняющих неравенства H-выпуклости мер. Через $\Phi(M)$ обозначим совокупность всех отображений φ из Q в M, порождающих линейные положительные операторы $T_\varphi : C(Q) \to B(Q)$, определенные соотношением:

$$T_\varphi f(x) = \varphi(x)(f) \quad (x \in Q,\ f \in C(Q)).$$

Оказывается, что множество $T(M)$ операторов вида T_φ, где $\varphi \in \Phi(M)$, исчерпывает класс операторов, сохраняющих неравенства H-выпуклости. Точнее, имеет место

Теорема 8.2. *Положительный оператор $T: C(Q) \to B(Q)$ удовлетворяет условию* $\operatorname{Spr}(T, H) = \operatorname{Spr}(T, P(H))$ *в том и только в том случае, если $T \in T(M)$.*

Достаточность. Пусть $T \in T(M)$, т. е. $T = T_\varphi$, где $\varphi \in \Phi(M)$, и пусть $T' \in \operatorname{Spr}(T, H)$, т. е. $T'_x(h) = T'h(x) \geqslant T_\varphi h(x)$ $(h \in H)$. В силу того, что $\varphi(x)$ сохраняет неравенства, имеем $T'_x(f) \geqslant \varphi(x)(f)$ $(f \in P(H))$, т. е. $T' \in \in \mathrm{Spr}(T, P(H))$.

Включение $\mathrm{Spr}(T, P(H)) \subset \mathrm{Spr}(T, H)$ несомненно. Таким образом, $\mathrm{Spr}(T, H) = \mathrm{Spr}(T, P(H))$.

Необходимость. Пусть $\mathrm{Spr}(T, H) = \mathrm{Spr}(T, P(H))$. Возьмем произвольную точку $x \in Q$, и пусть T_x — мера, определенная соотношением $f \to Tf(x)$. Покажем, что $T_x \in M$. Рассмотрим оператор T', действующий следующим способом:

$$T'f(x) = \begin{cases} T_z(f) & z \neq x \\ \mu(f) & z = x \end{cases},$$

где μ — положительная мера такая, что $\mu(h) \geqslant T_x(h)$ для всех $h \in H$. Очевидно, что оператор T' входит в $\mathrm{Spr}(T, H)$ и, следовательно, $T' \in \mathrm{Spr}(T, P(H))$, т. е. $\mu(f) \geqslant T_x(f)$ для всякой H-выпуклой функции f. Теорема доказана полностью.

Замечание. Теорема 8.2 справедлива в случае произвольного, а не только минорирующего конуса H. Однако изучение сохраняющих неравенства операторов в такой ситуации лишено особого интереса, т. е. в этом случае задавать H-выпуклые функции переносом неравенств H-выпуклости, вообще говоря, нельзя. В пункте 6° показано, что для некоторых интересных неминорирующих конусов утверждение теоремы 2.1 справедливо.

Пример 8.1. Пусть Q — выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве X и A — подпространство $C(Q)$, состоящее из аффинных функций. Заметим, что меры, сохраняющие неравенства A-выпуклости (в нашем случае просто выпуклости), имеют вид $\alpha\varepsilon_x$, где $\alpha \geqslant 0$ и $x \in Q$. В самом деле, пусть вероятностная мера ν сохраняет неравенства выпуклости. Обозначим через x_ν центр тяжести меры ν, т. е. такую точку из Q, что $\nu(h) = h(x_\nu)$ для любой аффинной функции h. Тогда, очевидно, для $f \in P(A)$

$$f(x_\nu) \geqslant \nu(f) \geqslant \sup_{h \leqslant f, h \in A} \nu(h) = \sup_{h \leqslant f, h \in A} h(x_\nu) = f(x_\nu).$$

Таким образом, $\nu = \varepsilon_x$. Из этого соотношения и из теоремы 8.2 немедленно получаем, что $\mathrm{Spr}(T, A) = \mathrm{Spr}(T, P(A))$ в том и только в том случае, если найдутся положительная ограниченная функция $\alpha: Q \to R$ и отображение φ компакта Q в себя такие, что $Tf(x) = \alpha(x) f(\varphi(x))$ для всех $f \in C(Q)$, $x \in Q$.

Пример 8.2. Пусть Q снова выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве X и L — конус следов элементов X' на Q. Пусть теперь мера ν сохраняет неравенства и $\nu \neq 0$. Обозначим через x_ν центр тяжести меры $\nu/\nu(1)$; тогда для всех $h \in L$, очевидно, $\nu(h) = \nu(1)h(x_\nu)$ и $x_\nu \in Q$. Отсюда для любой сублинейной на Q функции $p \in P(L)$ получим

$$\nu(1)\, p(x_\nu) = \nu(1)\, \varepsilon_{x_\nu}(p) \geqslant \nu(p) \geqslant$$
$$\geqslant \nu(1) \sup_{h \leqslant p, h \in L} h(x_\nu) = \nu(1)\, p(x_\nu),$$

т. е. $\nu(g) = \nu(1)\varepsilon_{x_\nu}(g)$ для всех $g \in [P(L)]$, где через $[P(L)]$ обозначается пространство L-выпуклых множеств. Возьмем положительную меру ν такую, что $\nu(g) = \alpha\varepsilon_x(g)$ для $g \in [P(L)]$, где $x \in Q$ и $\alpha \geqslant 0$. Заметим, что ν сохраняет неравенства. В самом деле, если $\mu(h) = \nu(h) = \alpha h(x)$ для всех $h \in L$, то для всех $p \in P(L)$

$$\mu(p) = \sup\{\mu(h) : h \leqslant p,\ h \in L\} = \sup\{\nu(h) : h \in$$
$$\in U_p\} = \alpha \sup\{h(x) : h \in U_p\} = \alpha p(x) = \nu(p).$$

Если, в частности, конус $P(L)$ содержит единицу (например, если Q лежит в гиперплоскости некоторого функционала), то по теореме Стоуна — Вейерштрасса $[P(L)] = C(Q)$, т. е. любая сохраняющая неравенство мера имеет по доказанному выше вид $\alpha\varepsilon_x$, где $\alpha \geqslant 0$, $x \in Q$. Таким образом, при сделанных предположениях оператор T сохраняет неравенства в том и только в том случае, если найдется функция $\alpha : Q \to R_+$ и отображение φ компакта Q в себя такие, что

$$Tf(x) = \alpha(x) f(\varphi(x)) \quad (f \in C(Q),\ x \in Q). \tag{8.1}$$

Замечание. Небольшая модификация рассуждений, приведенных в предыдущем примере, позволяет получить представление вида (8.1) для операторов, сохраняющих неравенства сублинейности в случае числового пространства. Напомним, что в этой ситуации рассматривается конус следов линейных функционалов над R^n на сферу направлений Z_n.

9°. Слабая H-выпуклость. В пункте 7° показано, что непрерывные H-выпуклые функции можно задавать с помощью интегральных неравенств. Известно, однако, что «хорошие» классы H-выпуклых функций имеют два способа задания: с помощью дискретных неравенств

Иенсена и как верхние огибающие аффинных функций или их подклассов. Вообще говоря, классы функций, определяемые этими двумя способами, не обязаны совпадать. Установим связь между указанными способами введения выпуклости.

Итак, пусть X есть некоторое множество, а R^x, как обычно, пространство вещественных функций на X. Пусть, далее, E — векторное подпространство R^x, являющееся одновременно K-линеалом при упорядочении с помощью конуса неотрицательных функций, причем супремумы двух элементов, вычисленные в E и в R^x, совпадают, а H некоторый конус в E.

Функция f из E называется *слабо H-выпуклой функцией*, если для любых точек $z, x_1, \ldots, x_n$ из X и неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h(x_k) \geqslant h(z)$ $(h \in H)$, выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \geqslant f(z)$.

Множество всех слабо H-выпуклых функций обозначается $P_w(H, E)$ или $P_w(H)$, если нет сомнений, о каком E идет речь.

Очевидно, что $P(H) \subset P_w(H)$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример 9.1[1]. Пусть X является множеством последовательностей $x = (\xi_n)$ таких, что $0 \leqslant \xi_n \leqslant \frac{1}{n}$, а $E = R^x$. Пусть A — совокупность аффинных, непрерывных в топологии координатной сходимости функций на X и

$$f : x \to \overline{\lim_{n}}\, n\, \xi_n.$$

Очевидно, что f является (слабой) выпуклой (значит, слабой A-выпуклой) функцией. С другой стороны, для каждого $h \in A$ такого, что $h \leqslant f$, на элементах X, лишь конечное число членов которых отлично от нуля, функция h неположительна. Так как последнее множество плотно в X, то $h \leqslant 0$. Однако на элементе $\tilde{x} = \left(\frac{1}{n}\right)$ значение функции f равно единице. Следовательно, $f \overline{\in} P(A)$.

Различие классов H-выпуклых и слабо H-выпуклых функций очевидно: второй класс замкнут в топологии

[1] Этот пример принадлежит В. А. Булавскому.

простой сходимости, а первый в общем случае нет. Следующая теорема показывает, что это обстоятельство является исчерпывающим.

Теорема 9.1. $P_w(H)=\overline{P(\overline{H})}$, *где черта означает замыкание в топологии простой сходимости.*

Доказательство. Необходимо проверить включение $\overline{P(\overline{H})}\supset P_w(H)$. Пусть E' — пространство, сопряженное к пространству E, наделенному топологией простой сходимости. Функция f входит в $\overline{P(\overline{H})}$ в том и только в том случае, если $\mu(f)\geqslant 0$ для всех $\mu\in(P(\overline{H}))^*$, где $(P(\overline{H}))^*$, как обычно, означает сопряженный конус. Заметим, что наименьшая верхняя полуструктура $\tilde{P}$, порожденная $\overline{H}$, плотна (в $\sigma(E, E')$) в $P(H)$. Таким образом, $\mu\in(P(\overline{H}))^*$ в том и только в том случае, если $\mu\in\tilde{P}^*$.

Для каждого $\nu\in E'$, $\nu\geqslant 0$ конический отрезок $\langle 0, \nu\rangle$ компактен в $\sigma(E', E)$. Кроме того, для всяких $h_1,\ldots,h_s\in H$ существует разбиение $\{\nu_1,\ldots,\nu_s\}$ функционала ν, являющегося «дискретной мерой», такое, что

$$\sum_{k=1}^{s}\nu_k(h_k)=\nu(h_1\vee\ldots\vee h_s).$$

Следовательно, применима теорема декомпозиции и $\mu\in\tilde{P}^*$ в том и только в том случае, если для всякого разбиения $\{\mu_1^-,\ldots,\mu_s^-\}$ функционала μ^- найдется разбиение $\{\mu_1^+,\ldots,\mu_s^+\}$ функционала μ^+ такое, что $\mu_k^+(h)\geqslant\mu_k^-(h)$ для всех $h\in H$ $(k=1,\ldots,s)$. Элементы $\nu\in E'$ имеют вид $f\to\sum_{t=1}^{m}\gamma_t f(x_t)$. Таким образом, функционал

μ представляется в виде $\mu=\sum_{k=1}^{s}\mu_k$, где

$$\mu_k: f\to\sum_{t=1}^{m}\alpha_k^t f\left(x_k^t\right)-\beta_k f(z_k)$$

(здесь x_k^t, $z_k\in X$; α_k^t, $\beta_k\geqslant 0$ $(k=1,\ldots,s;\ t=1,\ldots,m)$). При этом $\mu_k\in H^*$.

По условию $\mu_k(f)\geqslant 0$ $(k=1,\ldots,s)$. Значит, $\mu(f)\geqslant 0$. В силу произвольности μ функция f является предельной точкой множества H-выпуклых функций. Теорема доказана.

Пример 9.2. Пусть X — локально-выпуклое пространство, упорядоченное воспроизводящим замкнутым конусом K. Пусть $P_+(K)$ — совокупность определенных на K сублинейных монотонных функционалов, а $P^m(K)$ — совокупность функционалов, определенных на K и допускающих монотонное распространение (см. пример 1.2.5).

Пусть $H(K)$ совокупность следов элементов сопряженного конуса K^* на K. Тогда $P^m(K)$ по определению совпадает с $P(H(K))$, т. е. с множеством $H(K)$-выпуклых функций. Множество $P_+(K)$, в свою очередь, является множеством $P_w(H(K))$ слабо $H(K)$-выпуклых функций. В самом деле, если $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k h(x_k) \geqslant h(z)$ для всех $h \in H(K)$, где $\alpha_k \geqslant 0$; x_k, $z \in K$ $(k=1, \ldots, n)$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - z \in K$. Таким образом, всякая слабая $H(K)$-выпуклая функция удовлетворяет неравенствам

$$
\begin{array}{ll}
p(x_1+x_2) \leqslant p(x_1)+p(x_2) & (x_1,\ x_2 \in K); \\
p(\alpha x) = \alpha p(x) & (\alpha \geqslant 0,\ x \in K); \\
p(x) \geqslant p(y) & (x,\ y \in K,\ x-y \in K),
\end{array}
$$

т. е. входит в $P_+(K)$. Слабая $H(K)$-выпуклость монотонной сублинейной функции на K очевидна. Из теоремы 9.1 получается равенство $P_+(K) = \overline{P(H(K))}$.

Особенный интерес представляет вопрос о связи непрерывных H-выпуклых и слабых H-выпуклых функций. В этом случае справедлива

Теорема 9.2. *Пусть H — замкнутый конус в $C(Q)$. Каждая слабая H-выпуклая функция является равномерным пределом последовательности непрерывных H-выпуклых функций в том и только в том случае, если дискретные меры плотны в поляре конуса H-выпуклых функций.*

Необходимость. Если равномерное замыкание $P(H)$ совпадает с $P_w(H)$, то $(\overline{P(H)})^* = (P_w(H))^*$. Положим

$$
N = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_{x_k} - \varepsilon_z : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h(x_k) \geqslant h(z)\,(h \in H) \right\}
$$

и проверим, что $(P_w(H))^*$ является широким замыканием конической оболочки $\mathrm{Co}(N)$ множества N. В самом деле, предполагая противное, найдем меру $\mu_0 \in (P_w(H))^*$, не входящую в $\overline{\mathrm{Co}(N)}$. Применяя теорему отделимости, найдем непрерывную функцию f такую, что $\mu_0(f) < 0$ и $\mu(f) \geqslant 0$ для всех $\mu \in N$. Так как последнее означает, что f является слабо H-выпуклой функцией, то приходим к противоречию. Ввиду того, что $\mathrm{Co}(N)$ состоит из дискретных мер, получаем требуемое.

Достаточность. Пусть S является широко плотным в $(P(H))^*$ множеством дискретных мер и f — произвольная слабая H-выпуклая функция. Функция f является пределом H-выпуклых функций в том и только в том случае, если $\mu(f) \geqslant 0$ для всех $\mu \in S$.

Конус H, как и всякий замкнутый конус в $C(Q)$, обладает свойством Решетняка — Люмиса. Таким образом, для каждой меры μ из S_0,

$$\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varepsilon_{x_k} - \sum_{s=1}^{n} \beta_s \varepsilon_{y_s},$$

где $\alpha_k \geqslant 0$, $\beta_s > 0$; x_k, $y_s \in Q$ $(k = 1, \ldots, m;\ s = 1, \ldots, h)$, имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varepsilon_{x_k} \underset{H}{\geqslant} \sum_{s=1}^{n} \beta_s \varepsilon_{y_s}.$$

В частности, для разбиения $\{\beta_1 \varepsilon_{y_1}, \ldots, \beta_n \varepsilon_{y_n}\}$ найдется разбиение $\left\{\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^1 \varepsilon_{x_k}, \ldots, \sum_{k=1}^{m} \gamma_k^n \varepsilon_{x_k}\right\}$, где

$$\gamma_k^s \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, m;\ s = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{s=1}^{n} \gamma_k^s = \alpha_k \quad (k = 1, \ldots, m),$$

такое, что

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^s h(x_k) \geqslant \beta_s h(y_s) \, (s = 1, \ldots, n).$$

Так как f является слабо H-выпуклой функцией, то

$$\sum_{k=1}^{m} \gamma_k^s f(x_k) \geqslant \beta_s f(y_s) \quad (s = 1, \ldots, n),$$

или, после суммирования, $\mu(f) \geqslant 0$. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Пусть $P(H)$ — замкнутый конус H-выпуклых функций, где H — замкнутый конус в K-полулинеале $\mathfrak{B}_n$. Каждая слабо H-выпуклая функция является H-выпуклой.*

Доказательство. В пункте 5° было показано, что дискретные меры плотны в поляре любого конуса в $C(Z_n)$, состоящего из сублинейных функций (см. теорему 5.3).

В заключение сформулируем критерий слабой H-выпуклости функции.

Теорема 9.3. *Пусть H — замкнутый конус в пространстве $C(Q)$, причем дискретные меры плотны в $P(H)^*$. Непрерывная функция f является слабо H-выпуклой функцией в том и только в том случае, если $Tf \geqslant f$ для любого оператора $T \in \mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$ такого, что $Th \geqslant h$ для всех $h \in H$.*

Доказательство этой теоремы получается комбинацией теоремы 9.2 и рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 6.4.

ГЛАВА III

СУПРЕМАЛЬНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

0°. Введение. Здесь будут рассмотрены некоторые специальные множества H в упорядоченных пространствах, так называемые супремальные генераторы, т. е. такие конусы, что каждый элемент пространства является в том или ином смысле H-выпуклым (H-выпуклой функцией). Подобные объекты тесно связаны с проблемой сходимости последовательностей операторов и функционалов, задачей топологической классификации компактов и другими вопросами.

В 1953 г. П. П. Коровкин доказал, что последовательность (T_n) положительных линейных операторов $(T_n): C([0, 1]) \rightarrow B([0, 1])$, сходящаяся к тождественному оператору на множестве квадратных трехчленов, всюду сходится к тождественному оператору. Эта теорема применима к теории приближений (например, для доказательства, что полиномы Бернштейна $(B_n f)$ равномерно сходятся к f для всякой функции $f \in C([0, 1])$ при $n \rightarrow \infty$, достаточно проверить, что это имеет место только для трех функций). Во Введении было показано, что конус H квадратных трехчленов обладает тем замечательным свойством, что любая непрерывная функция на $[0, 1]$ является H-выпуклой. Оказывается, что именно это и лежит в основе явлений сходимости указанного типа. Развиваемый ниже подход, основанный на идеях двойственности Минковского, позволяет получить необходимые и достаточные условия подобного и более сложных явлений в весьма прозрачных терминах. Одно из решающих упрощений — это переход от рассмотрения «генерирующих» подпространств к конусам. Необходимо отметить, что, по-видимому, впервые связь рассматриваемых явлений с конструкцией супремального порождения (для случая пространства непрерывных функций на отрезке) заметил В. А. Баскаков.

Концепция супремального генератора находит приложения при классификации компактных пространств. К этому же кругу вопросов тесно примыкает восходящий еще к Перрону метод квазилинеаризации Беллмана и Калабы. Основа этого метода (и одна ее модификация) будет изложена в конце главы. Детально с проблематикой квазилинеаризации можно познакомиться по монографии [10].

1°. Супремальные генераторы в смысле К-пространства. Пусть Y — некоторое K-пространство, X — векторное подпространство Y и H — подмножество X. Индуцируем в X отношение порядка из Y. Напомним, что множество H является *минорирующим* (в X), если для любого $x \in X$ множество $U_x = \{h \in H : h \leqslant x\}$ непусто. Будем говорить, что *H супремально порождает X в смысле Y*, если любой элемент из X является H-выпуклым, т. е. $P(H, Y, Y) \supset X$ (говоря об H-выпуклости, к условно полной структуре Y присоединяются, как обычно, наибольший и наименьший элементы). Ясно, что всякое супремально порождающее множество H является минорирующим.

Оказывается, что сходимость некоторых последовательностей монотонных операторов полностью определяется поведением этих последовательностей на супремально порождающих множествах.

Введем определение. Пусть H — минорирующее множество в X, а Z — некоторое K-пространство. Говорят, что *оператор $T: X \to Z$ перестановочен с операцией* $\sup$ на H, если для любого $U \in \mathfrak{B}(H, X, Y)$ выполняется условие $T \sup U = \sup T(U)$. (Заметим, что для любого монотонного оператора имеет место неравенство $T \sup U \geqslant \sup T(U)$.) В случае, если H супремально порождает X в смысле Y, примером оператора, перестановочного с операцией $\sup$, может служить оператор вложения $E: X \to Y$.

Справедливо следующее

Предложение 1.1. *Пусть множество H супремально порождает пространство X в смысле Y и T — нечетный (т. е. $T(-x) = -Tx$ для всех $x \in X$) оператор, переводящий X в K-пространство Z и перестановочный с операцией* $\sup$ *на H. Если последовательность (T_n) монотонных нечетных операторов, переводящих X в Z,* *такова, что* $\varliminf_n T_n h \geqslant Th$ *при всех* $h \in H$, *то* $T_n x \xrightarrow{(0)} Tx$ *при всех* $x \in X$[1].

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $h \in U_x = \{h' \in H : h' \leqslant x\}$. Тогда $T_n h \leqslant T_n x$ и поэтому $Th \leqslant \varliminf_n T_n h \leqslant \varliminf_n T_n x$. Поскольку $x = \sup U_x$ и оператор T перестановочен с операцией sup, то $Tx = \sup T(U_x)$. Отсюда следует неравенство $Tx \leqslant \varliminf_n T_n x$. Рассуждая таким же образом относительно элемента $-x$, получим $T(-x) \leqslant \varliminf_n T_n(-x)$. Так как операторы T и T_n нечетные, то последнее неравенство можно переписать в виде $Tx \geqslant \varlimsup_n T_n x$, откуда и следует справедливость предложения.

В дальнейшем нас будет интересовать в основном случай, когда T — линейный положительный оператор. Если V_1, V_2 — упорядоченные векторные пространства то совокупность всех линейных положительных операторов $T : V_1 \to V_2$ будем обозначать, как обычно, через $\mathcal{L}^+(V_1, V_2)$. Пусть H — подмножество векторного пространства X, лежащего в K-пространстве Y; $T \in \mathcal{L}^+(X, Z)$, где Z — некоторое упорядоченное пространство. Напомним, что *положительным ростком оператора* T *на множестве* H называется множество $\operatorname{Spr}(T, H)$, определяемое формулой

$$\operatorname{Spr}(T, H) = \{T' \in \mathcal{L}^+(X, Z) : T'h \geqslant Th\,(h \in H)\}.$$

Из предложения 1.1 вытекает следующее

Предложение 1.2. *Пусть множество* H *супремально порождает* X, *оператор* T *из* $\mathcal{L}^+(X, Z)$ *перестановочен с операцией* sup *на* H. *Тогда* $\operatorname{Spr}(T, H) = \{T\}$.

Следует выяснить, когда предложение 1.2 допускает обращение, т. е. из справедливости для всех операторов T, обладающих соответствующими свойствами, равенства $\operatorname{Spr}(T, H) = \{T\}$ следует, что H — супремально порождающее множество. Оказывается, что это можно гарантировать, если H — конус. Последний случай интересен и по ряду других причин. Поэтому введем следую-

[1] В дальнейшем будем оперировать с последовательностями операторов и функционалов. Большинство результатов верно и для сетей.

щее определение. Конус H, супремально порождающий векторное пространство X в смысле K-пространства Y, называется *супремальным генератором* X *(в смысле* Y*)*. Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 1.1. *Пусть H — минорирующий конус в векторном подпространстве X некоторого K-пространства Y. Пусть, далее, $E:X\to Y$ оператор тождественного вложения. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *H супремальный генератор X;*

(2) *если последовательность операторов (T_n) такова, что $T_n\in\mathscr{L}^+(X, Y)$ и $\underline{\lim}_n T_nh\geqslant h$ для всех $h\in H$, то $T_nx\xrightarrow{(o)}x\,(x\in X)$;*

(3) $\operatorname{Spr}(E, H)=\{E\}$.

Доказательство. Импликация (1)$\Rightarrow$(2) следует из предложения 1.1; (2)$\Rightarrow$(3) очевидна. Импликация (3)$\Rightarrow$(1) вытекает из теоремы 2.2.1. Теорема доказана.

Приведем еще следующее

Предложение 1.3. *Пусть H — супремальный генератор X в смысле Y; Z — некоторое K-пространство. Оператор $T\in\mathscr{L}^+(X, Z)$ перестановочен с операцией* sup *на H в том и только в том случае, если* $\operatorname{Spr}(T, H)=\{T\}$.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь достаточность. Предположим, что T не перестановочен с операцией sup на H, т. е. существует элемент $x'\in X$ такой, что

$$Tx'=T\sup U_{x'}>\sup\{Th: h\in U_{x'}\}.$$

Рассмотрим оператор $q_T:X\to Z$, определенный формулой $q_T(x)=\sup T(U_x)$. Так как H — конус, а T монотонен и линеен, то q_T — супераддитивный, положительно однородный, монотонный оператор. Кроме того, по предположению $Tx'>q_T(x')$. Рассмотрим подпространство $X_1\doteq\{\alpha x'\}_{\alpha\in R}$ и оператор $T_1:X_1\to Z$, определенный формулой

$$T_1(\alpha x')=\alpha q_T(x').$$

Оператор T_1 мажорирует q_T на X_1 и потому в силу теоремы Хана — Банаха — Канторовича найдется линейный оператор $T_2:X\to Z$, совпадающий с T_1 на X_1 и мажорирующий q_T на X. Из монотонности q_T следует, что T_2 положителен. Для $h\in H$ имеем

$$T_2h\geqslant q_T(h)=\sup\{Th': h'\leqslant h,\ h'\in H\}=Th.$$

Таким образом, $T_2 \in \operatorname{Spr}(T, H)$. Кроме того,

$$T_2 x' = T_1 x' = q_T(x') < Tx',$$

откуда следует, что $T_2 \neq T$. Таким образом, $\operatorname{Spr}(T, H) \neq \neq \{T\}$, что и доказывает предложение.

Опишем некоторые свойства множества операторов, перестановочных с операцией sup.

Предложение 1.4. *Пусть оператор $T \in \mathscr{L}^+(X, Z)$ перестановочен с операцией* sup *на минорирующем множестве H и оператор $T_1: X \to Z$ таков, что $0 \leqslant T_1 \leqslant T$. Тогда T_1 также перестановочен с операцией* sup *на H.*

Доказательство. Положим $T_2 = T - T_1$, тогда $T_2 \in \mathscr{L}^+(X, Z)$. Пусть $x \in X$. Имеем

$$T_1 x + T_2 x = Tx =$$
$$= \sup T(U_x) = \sup \{T_1 h + T_2 h : h \in U_x\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup T_1(U_x) + \sup T_2(U_x) \leqslant T_1 x + T_2 x.$$

Из этой формулы следует, что $\sup T_1(U_x) + \sup T_2(U_x) = = Tx$. Поскольку $T_i x \geqslant \sup T_i(U_x)$ $(i = 1, 2)$, то $T_i x = = \sup T_i(U_x)$. Предложение доказано.

Доказанное предложение дает простую геометрическую характеристику множества S_H всех операторов из $\mathscr{L}^+(X, Z)$, перестановочных на H с операцией sup. Рассмотрим $\mathscr{L}^+(X, Z)$ как конус в пространстве $\mathscr{L}(X, Z)$ всех регулярных операторов. Предложение 1.4 показывает, что этот конус с каждой своей точкой содержит и свою грань $\operatorname{Co}(\langle 0, T \rangle)$, где Co операция взятия конической оболочки, а $\langle 0, T \rangle = \{T' \in \mathscr{L}^+(X, Z) : T' \leqslant T\}$. (Напомним, что *гранью конуса K* называется конус Γ, являющийся пересечением K с некоторым подпространством и обладающий следующим свойством: если $T', T'' \in K$; $T' + T'' \in \Gamma$, то $T', T'' \in \Gamma$.) Таким образом, множество S_H совпадает с объединением некоторых граней конуса $\mathscr{L}^+(X, Z)$. Отметим, что в случае, когда $H = X$, множество S_H совпадает со всем конусом $\mathscr{L}^+(X, Z)$.

В заключение приведем следующее

Предложение 1.5. *Линейная оболочка L множества S_H является нормальным подпространством K-пространства $\mathscr{L}(X, Z)$.*

Доказательство. Рассмотрим конус $\operatorname{Co}(S_H)$. Если $T \in \operatorname{Co}(S_H)$, то $T = \sum_{i=1}^{n} T_i$, где $T_i \in S_H$. Пусть $T' \leqslant T$, $T' \in \mathscr{L}^+(X, Z)$. Используя лемму о двойном разбиении положительных элементов, найдем операторы T_i ($i = 1, \ldots, n$) такие, что $T'_i \leqslant T_i$, $\sum_{i=1}^{n} T'_i = T'$. Из предложения 1.4 следует, что $T' \in \mathrm{Co}(S_H)$. Таким образом, конус $\mathrm{Co}(S_H)$ с каждой своей точкой T содержит конический отрезок $\langle 0, T\rangle$. Используя это обстоятельство, легко проверить, что $L = \{T \in \mathscr{L}(X, Z) : |T| \in \mathrm{Co}(S_H)\}$. Предложение доказано.

Следствие. *Пространство L является K-пространством.*

2^0. Супремальные генераторы пространства $C(Q)$ в смысле $B(Q)$. Изучение супремальных генераторов пространства $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ существенно опирается на результаты, изложенные в главе II. Важное значение при этом имеют H-максимальные меры (см. гл. II, 7°), т. е. положительные меры, максимальные в смысле предпорядка, определяемого конусом H. (Меру μ можно рассматривать как оператор со значениями в K-пространстве R. Поэтому в излагаемой ситуации имеют смысл все определения и результаты пункта 1°.) По теореме 2.7.2 мера μ является H-максимальной в том и только в том случае, если $\mu(f) = \sup\{\mu(h) : h \in U_f\}$. Из предложения 1.3 видно, что если H — супремальный генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$, то мера μ перестановочна с операцией sup на H в том и только в том случае, если $\mathrm{Spr}(\mu, H) = \{\mu\}$. Заметим, что по теореме 2.7.1 существование H-максимальной меры эквивалентно тому, что H — минорирующий конус. Приведем критерий супремального генератора в терминах мер.

Предложение 2.1. *Пусть H — конус в $C(Q)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) H — супремальный генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$;

(2) если $x \in Q$ и последовательность положительных мер (μ_n) такова, что $\varliminf_n \mu_n(h) \geqslant h(x)$ при всех $h \in H$, то (μ_n) широко сходится к ε_x;

(3) мера Дирака ε_x является H-максимальной при всех $x \in Q$.

Доказательство. Импликация (1)$\Rightarrow$(2) следует из предложения 1.1; импликация (2)$\Rightarrow$(3) очевидна; импликация (3)$\Rightarrow$(1) вытекает из принципа сохранения неравенств (см. главу II, 7°) и того, что конус H минорирующий. Предложение доказано.

Замечание. Утверждение (3) можно записать в следующем виде

(3′) *граница Шоке конуса H совпадает с Q.*

Результаты исследований, представленные в главе II, позволяют описать все операторы $T: C(Q) \longrightarrow B(Q)$, перестановочные с операцией sup на супремальном генераторе H. В самом деле, поскольку H — супремальный генератор, то $P(H, C(Q), B(Q)) = C(Q)$ и потому для любого положительного оператора $T: C(Q) \to B(Q)$) справедливо соотношение $\mathrm{Spr}(T, P(H)) = \mathrm{Spr}(T, C(Q)) = \{T\}$. Из предложения 1.3 и теоремы 2.8.2 следует, что T перестановочен с операцией sup на H в том и только в том случае, если он входит в множество $T(M)$, где M — множество всех H-максимальных мер. Напомним, что $T(M)$ состоит из операторов вида T_φ, где T_φ — оператор, определяемый формулой

$$T_\varphi f(x) = \varphi(x)(f) \qquad (x \in Q, f \in C(Q))$$

(φ — отображение Q в M такое, что для всех $f \in C(Q)$ функция $T_\varphi f$ ограничена).

Теорема 1.1 описывает супремальный генератор с помощью положительного ростка оператора вложения $E: C(Q) \longrightarrow B(Q)$. Представляет интерес выяснить, можно ли охарактеризовать супремальный генератор лишь с помощью операторов из $\mathscr{L}^+(C(Q), C(Q))$.

Пусть $I: C(Q) \longrightarrow C(Q)$ — тождественный оператор. Нетрудно понять, что утверждение «если $\mathrm{Spr}(I, H) = \{I\}$, то H — супремальный генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$», вообще говоря, неверно. (Если $T: C(Q) \longrightarrow C(Q)$, то, как следует из определения, $\mathrm{Spr}(T, H) = \{T' \in \mathscr{L}^+(C(Q), C(Q)): T'h \geqslant Th \quad (h \in H)\}$.) Действительно, равенство $\mathrm{Spr}(I, H) = \{I\}$ справедливо и в том случае, когда H — это супремальный генератор $C(Q)$ в смысле его K-пополнения $\widehat{C(Q)}$. Но генератор $C(Q)$ в смысле $\widehat{C(Q)}$ не обязан быть генератором $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ (в конце этого пункта будет дан пример). Для того, чтобы описать генераторы H пространства $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ в терминах только операторов из $\mathscr{L}^+(C(Q), C(Q))$, естественно попытаться найти множество S операторов, перестановочных на H с операцией sup, переводящих $C(Q)$ в $C(Q)$ и таких, что из равенства $\mathrm{Spr}(T, H) = \{T\}$ для всех $T \in S$ следовало бы, что H — супремальный генератор.

Критерий генератора в терминах H-максимальных мер подсказывает, что в качестве S следует взять множество всех тензорных произведений $\varepsilon_x \otimes 1$ $(x \in Q)$. (Если $\mu \in C'(Q)$, то оператор $\mu \otimes 1 : C(Q) \longrightarrow C(Q)$ определяется формулой $(\mu \otimes 1) f = \mu(f) 1$ для любого $f \in C(Q)$).

Предложение 2.2. *Если конус H в $C(Q)$ таков, что для любого $x \in Q$ выполняется* $\mathrm{Spr}(\varepsilon_x \otimes 1, H) = \{\varepsilon_x \otimes 1\}$, *то H — супремальный генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$.*

Доказательство. Покажем, что для любого $x \in Q$ выполняется $\mathrm{Spr}(\varepsilon_x, H) = \{\varepsilon_x\}$. Пусть $\mu \in \mathrm{Spr}(\varepsilon_x, H)$. Рассмотрим операторы $\varepsilon_x \otimes 1$ и $\mu \otimes 1$. Для каждого $x \in Q$ и $h \in H$ справедливо соотношение

$$(\mu \otimes 1) h(y) = \mu(h) \geqslant h(x) = (\varepsilon_x \otimes 1) h(y).$$

Таким образом, $\mu \otimes 1 \in \mathrm{Spr}(\varepsilon_x \otimes 1, H)$ и, стало быть, $\mu \otimes 1 = \varepsilon_x \otimes 1$. Полученное равенство означает, что $\mu = \varepsilon_x$. Для завершения доказательства надо сослаться на предложение 2.1.

По предложению 1.1 из (o)-сходимости значений некоторых последовательностей операторов на элементах генератора вытекает (o)-сходимость всюду. Находясь в нормированном пространстве $C(Q)$, естественно выяснить вопрос, когда из сильной сходимости последовательности операторов на генераторе вытекает ее сильная сходимость на всем пространстве. Ответ на этот вопрос будет дан для операторов, перестановочных на H с операцией sup и действующих из $C(Q)$ в $C(Q)$. Рассмотрим множество $T_c(Q)$, состоящее из всех операторов T_φ, где φ — непрерывное отображение Q в себя. Отождествляя Q с множеством $\{\varepsilon_x : x \in Q\}$, получим, что $T_c(Q) \subset T(Q)$; кроме того, $\varepsilon_x \otimes 1 \in T_c(Q)$ при любом $x \in Q$. Заметим, что $T_\varphi f = f \circ \varphi$ для всех $T_\varphi \in T_c(Q)$ и $f \in C(Q)$.

Предложение 2.3. *Пусть H — супремальный генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ и $T \in T_c(Q)$. Если последовательность (T_n) операторов из $\mathscr{L}^+(C(Q), C(Q))$ такова, что при любом $h \in H$ последовательность $(T_n h)$ сходится по норме $C(Q)$ и, кроме того,* $\lim\limits_n T_n h \geqslant Th$, *то* $\|T_n f - Tf\| \underset{n}{\to} 0$ *для любой функции $f \in C(Q)$.*

Доказательство. Так как $T \in T_c(Q)$, то найдется непрерывное отображение $\varphi : Q \longrightarrow Q$ такое, что $Tf =$

$=f^{\bigcirc}\varphi$ для любой $f\in C(Q)$. Пусть f — непрерывная на Q функция, $x\in Q$ и $\varepsilon>0$. Так как H — супремальный генератор, то найдутся функции h' и h'' из H такие, что

$$h'\leqslant f;\quad f(\varphi(x))<h'(\varphi(x))+\frac{\varepsilon}{2};$$

$$h''\leqslant -f;\ -f(\varphi(x))<h''(\varphi(x))+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Найдется открытая окрестность V_x точки x, для элементов y которой справедливы неравенства

$$f(\varphi(y))<h'(\varphi(y))+\frac{\varepsilon}{2};\qquad -f(\varphi(y))<h''(\varphi(y))+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая $b_h=\lim\limits_n T_nh\ (h\in H)$, получим при всех $y\in V_x$

$$T_nf(y)-f(\varphi(y))>T_nh'(y)-h'(\varphi(y))-\frac{\varepsilon}{2}=$$

$$=T_nh'(y)-Th'(y)-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant T_nh'(y)-b_{h'}(y)-\frac{\varepsilon}{2};$$

$$T_nf(y)-f(\varphi(y))<-T_nh''(y)+h''(\varphi(y))+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}=-T_nh''(y)+Th''(y)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant -T_nh''(y)+$$

$$+b_{h''}(y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбирая $n(\varepsilon)$ так, чтобы при $n>n(\varepsilon)$ одновременно выполнялись неравенства $\|T_nh'-b_{h'}\|<\frac{\varepsilon}{2}$; $\|T_nh''-b_{h''}\|<\frac{\varepsilon}{2}$, получим

$$\sup_{y\in V_x}|T_nf(y)-Tf(y)|\leqslant\varepsilon.$$

Семейство $(V_x)_{x\in Q}$ образует открытое покрытие Q. Выделяя из него конечное подпокрытие, получим требуемое. Предложение доказано.

Замечание 1. Пусть V — подпространство $C(Q)$ и конус H супремально порождает V в смысле $B(Q)$. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 2.3, легко показать, что если последовательность положительных линейных операторов $T_n\colon V\to V$ такова, что при всех $h\in H$ существует $\lim\limits_n T_nh\geqslant h$ (предел понимается в смысле $\|\cdot\|_{C(Q)}$), то $\|T_nv-v\|\underset{n}{\to}0$ для всех $v\in V$.

Замечание 2. Фактически мы доказали несколько большее, т. е. если (в ситуации пункта 1°) для каждого $x\in X$ и $\varepsilon>0$ найдется элемент $h\in\{h_1\vee\ldots\vee h_k : h_1,\ldots,h_k\in H\}$ такой, что $h\leqslant x\leqslant h+\varepsilon y$, где y — фиксированный положительный элемент, и последовательность (T_n) операторов из $\mathscr{L}^+(X, Y)$ такова, что $(T_n h)$ стремится с регулятором y к элементу $b_h\geqslant h$ для всех $h\in H$, то $T_n x \xrightarrow{(r)} x$ для всех $x\in X$ (с регулятором y).

Заметим, что элемент $x\in X$ является H-выпуклым в том и только в том случае, если найдется семейство элементов $(z_h)_{h\in A}$, где $A\subset H$ такое что, $z_h\geqslant 0$ и $\inf z_h=0$, причем $h+z_h\geqslant x\geqslant h$ $(h\in A)$. В самом деле, если $x=\sup U_x$, то можно положить $z_h=x-h\,(h\in U_x)$. С другой стороны, если элемент z таков, что $z\geqslant h$ для всякого $h\leqslant x$, $h\in A$, то $z+z_h\geqslant h+z_h\geqslant x$. Следовательно, $x\leqslant\inf\limits_h(z+z_h)=\inf\limits_h z_h+z=z$, $x=\sup A$. Это показывает, что тип сходимости, связанный с генератором, существенно зависит от устройства семейств $(z_h)_{h\in A}$.

Приведем характеристику супремального генератора в терминах декомпозиционных ростков $\mathrm{Dpr}(T, H)$. Из следствия теоремы 2.2.1 получается

Предложение 2.4. *Конус H является супремальным генератором $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ в том и только в том случае, если $\mathrm{Dpr}(T,H)=\{T\}$ для любого оператора $T\in\mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$.*

Суммируем результаты этого пункта в виде следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть H — конус в $C(Q)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *H — супремальный генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$;*

(2) *для любого $x\in Q$ мера ε_x H-максимальна;*

(3) *если $x\in Q$ и последовательность положительных мер (μ_n) такова, что $\varliminf\limits_n \mu_n(h)\geqslant h(x)$ при всех $h\in H$, то (μ_n) широко сходится к ε_x;*

(4) *для каждого оператора $\varepsilon_x\otimes 1$ положительный росток $\mathrm{Spr}(\varepsilon_x\otimes\mathbf{1}, H)$ совпадает с $\{\varepsilon_x\otimes\mathbf{1}\}$;*

(5) *если $T\in T_c(Q)$ и последовательность (T_n) из $\mathscr{L}^+(C(Q), C(Q))$ такова, что $\lim\limits_n T_n h\geqslant Th$ для всех $h\in H$ (здесь имеется в виду равномерная сходимость), то $\|T_n f-Tf\|\xrightarrow[n]{}0$ для любого $f\in C(Q)$;*

(6) *для любого оператора* $T \in \mathscr{L}^+(C(Q), B(Q))$ *декомпозиционный росток* $\mathrm{Dpr}(T, H)$ *совпадает с* $\{T\}$.

В следующем пункте приведен еще один критерий того, что конус H является супремальным генератором $C(Q)$ в смысле $B(Q)$.

Пример 2.1. Пусть H — подпространство пространства $C([0,1])$, состоящее из функций, принимающих одинаковые значения на концах интервала. В пункте 3° введения показано, что H является генератором $C([0,1])$ в себе (т. е. в смысле K-пополнения пространства $C([0,1])$). С другой стороны, границей Шоке $\mathrm{Ch}(H)$ является открытый промежуток $(0,1)$. Действительно, мера $(\varepsilon_0+\varepsilon_1)/2$ входит как в росток $\mathrm{Spr}(\varepsilon_0, H)$, так и в $\mathrm{Spr}(\varepsilon_1, H)$. Этот пример показывает, что не любой оператор $T: C(Q) \longrightarrow C(Q)$ такой, что $\mathrm{Spr}(T, H) = \{T\}$, имеет вид T_φ, где φ непрерывное отображение в множество H-максимальных мер. В самом деле, тождественный оператор I, очевидно, допускает единственное представление в виде T_φ, а именно, $\varphi: x \longrightarrow \varepsilon_x$. С другой стороны, мера ε_0 не является H-максимальной.

3⁰. Конечные генераторы пространства $C(Q)$ в смысле $B(Q)$. Пусть X — векторное пространство, лежащее в K-пространстве Y. С точки зрения сходимости последовательности операторов представляет интерес выяснить, когда в X существует *конечный супремальный генератор* (т. е. генератор, натянутый на конечное число образующих или, что то же самое, имеющий конечное число крайних лучей). В этом случае о поведении последовательности операторов на всем пространстве можно судить, зная о ее поведении лишь на конечном числе элементов.

Оказывается, если X есть K-линеал (в смысле порядка, индуцированного из Y), то из наличия в X конечного супремального генератора следует, что X является K-линеалом ограниченных элементов. Более того, справедливо следующее

Предложение 3.1. *Если K-линеал X содержит минорирующий конечный конус, то X является K-линеалом ограниченных элементов.*

Доказательство. Пусть конус H имеет своими образующими элементы $h_1, \ldots, h_n$. Обозначим через u инфимум этих элементов. Так как H — минорирующий конус, то для любого элемента $x \in X$ найдутся неотрицательные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k \leqslant x$. Полагая $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha$, получим, что $\alpha u \leqslant x$. Рассуждая таким же образом относительно элемента $-x$, найдем число $\beta \geqslant 0$, при котором $\beta u \leqslant -x$. Таким образом, нашлись числа $\alpha, \beta \in R_+$ такие, что

$$-\alpha(-u) \leqslant x \leqslant \beta(-u). \tag{3.1}$$

Обозначим через e элемент $-u$. Можно видеть, что $e > 0$. Осталось проверить, что e — это единица в пространстве X. Допустим противное, тогда найдется элемент $x_0 > 0$ такой, что $x_0 \wedge e = 0$. Пусть число β таково, что $x_0 \leqslant \beta e$. Не нарушая общности, можно считать, что $\beta \geqslant 1$. Тогда $\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) x_0 \geqslant 0$ и, следовательно,

$$0 < x_0/\beta \leqslant x_0 \wedge e = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что e — единица в X. Поскольку, помимо этого, по (3.1) любой элемент $x \in X$ ограничен по отношению к e, то X есть K-линеал ограниченных элементов. Предложение доказано.

По теореме Крейнов — Какутани для каждого архимедова K-линеала ограниченных элементов X существует компакт Q такой, что X изоморфен (алгебраически и порядково) некоторой подструктуре пространства $C(Q)$, всюду плотной в $C(Q)$. Если, кроме того, X полон относительно своей естественной нормы, то он совпадает с пространством $C(Q)$. Поэтому ограничимся изучением конечных генераторов лишь в $C(Q)$ в смысле $B(Q)$.

Необходимо отметить, что любое плотное подпространство в $C(Q)$ является супремальным генератором $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ (см. предложение 1.1.3). Это обстоятельство позволяет сформулировать на языке самого KN-линеала ограниченных элементов X критерий того, что конус H в X при реализации X (как плотного подпространства $C(Q)$) станет супремальным генератором X (и следовательно, $C(Q)$) в смысле $B(Q)$. По предложениям 1.1.2 и 1.1.3 H обладает этим свойством в том и только в том случае, если минимальная верхняя полуструктура, порожденная H (т. е. множество элементов вида $h_1 \vee \ldots \vee h_m$, где $h_i \in H$ ($i=1, \ldots, m$; $m=1, 2, \ldots$)), плотна в X.

При исследовании конечных генераторов удобно использовать критерий генератора в терминах «почти пиковых» функций. Этот критерий вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Точка z компакта Q входит в границу Шоке минорирующего конуса H пространства $C(Q)$ в том и только в том случае, если выполнено следующее условие (A): для любых $\varepsilon>0$ и окрестности U точки z найдется функция $h\in H$, «опорная к пике Урысона», т. е. такая, что*

$$h(z)>1-\varepsilon; \quad h(x)\leqslant 1 \, (x\in U); \quad h(x)\leqslant 0 \, (x\in Q\setminus U). \tag{3.2}$$

Доказательство. (1). Пусть z входит в границу Шоке конуса H и U — окрестность точки z. Используя теорему Урысона, построим пику Урысона g с вершиной в точке z:

$$g(z)=1; \; g(x)=0 \, (x\in Q\setminus U); \; 0\leqslant g\leqslant 1.$$

По любому $\varepsilon>0$ найдем функцию $h\in H$ такую, что $h\leqslant g$ и $h(z)>g(z)-\varepsilon$. Эта функция удовлетворяет условиям (3.2) при данных ε и U.

(2). Пусть выполнено условие (A). Необходимо показать, что $f(z)=\sup\{h(z):h\in U_f\}$ ($f\in C(Q)$). Отметим, прежде всего, что это соотношение достаточно проверить лишь для функций f таких, что $f(x)>0$ ($x\in Q$). В самом деле, так как H — минорирующий конус, то он содержит сильно отрицательный элемент f_H, и потому для любой функции $g\in C(Q)$ найдется число $\lambda>0$ такое, что $(g-\lambda f_H)(x)>0$ ($x\in Q$). Из неравенства

$$(g-\lambda f_H)(z)=\sup\{h(z):h\leqslant g-\lambda f_H, \; h\in H\}$$

следует, что $g(z)=\sup\{h(z):h\leqslant g, \; h\in H\}$.

Итак, пусть f — сильно положительный элемент $C(Q)$. Не умаляя общности, считаем, что функция f нормирована условием $f(z)=1$. Пусть U такая окрестность точки z, что $|f(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x\in U$. По $\frac{\varepsilon}{2}$ и U найдем функцию h', удовлетворяющую условиям (3.2), и положим $h=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)h'$. Заметим, что

$$h(z)=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)h'(z)>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2>f(z)-\varepsilon.$$

Для $x \in U$ выполняются неравенства $f(x)-1 \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}$, $h(x) \leqslant 1-\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $f(x)-h(x) \geqslant f(x)-1+1-h(x) \geqslant 0$. Помимо этого, для $x \in Q \setminus U$ имеем $h(x) \leqslant 0$ и, стало быть, $h(x) \leqslant f(x)$. Таким образом, $h \leqslant f$. Теорема доказана.

Следствие. *Минорирующий конус H является супремальным генератором пространства $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ в том и только в том случае, когда для любой точки $z \in Q$ выполнено условие* (A).

Замечание. Теорема 3.1 представляет из себя утверждение типа теоремы Бишопа — де Лю (см., например, [13]), дающей описание границы Шоке функциональных алгебр в терминах опорных к пикам Урысона.

Покажем, используя теорему 3.1, что в пространстве $C(Q)$, где Q — конечномерный компакт, существует конечный супремальный генератор.

Предложение 3.2. *Пусть Q — компакт, лежащий во внутренности положительного ортанта R^n_+ пространства R^n. Конус H, натянутый на образующие* -1, $x \longrightarrow x_1, \ldots, x \longrightarrow x_n$, $x \longrightarrow -\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, *является супремальным генератором $C(Q)$ в смысле $B(Q)$.*

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$, точку $z=(z_1, \ldots, z_n) \in Q$ и окрестность U этой точки. Рассмотрим функцию $h': x \rightarrow -\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k-z_k)^2$. Итак, $h' \in H$. Выберем, далее, настолько малое положительное число δ, что $\delta < \sum\limits_{k=1}^{n} z_k^2$ и $-\delta > \max\{h'(x) : x \in Q \setminus U\}$. Функция $h''=h'+\delta 1$ входит в H и обладает следующими свойствами: $h''(z)=\delta$; $h''(x) \leqslant 0 \, (x \in Q \setminus U)$; $h''(x) \leqslant \delta \, (x \in U)$. Функция h''/δ удовлетворяет при данных ε, z и U соотношениям (3.2). Доказательство завершается ссылкой на следствие к теореме 3.1.

Анализируя доказательство предложения 3.2, нетрудно привести достаточный признак супремального генератора.

Предложение 3.3. *Если H — конус в $C(Q)$, содержащий сильно отрицательный элемент f_H и обладающий тем свойством, что для любой точки $z \in Q$ найдется функция h такая, что $h(z)=0$; $h(x) < h(z) \, (x \in Q \setminus \{z\}$;*

$h-\delta f_H \in H$ при некотором $\delta > 0$, то H — супремальный генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$.

Приведем несколько простых примеров.

Пример 3.1. Пусть f и g строго вогнутые дифференцируемые функции, определенные на промежутке $[a, b]$, причем f убывает, g возрастает и при всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$\begin{vmatrix} f(x) & f'(x) \\ g(x) & g'(x) \end{vmatrix} > 0; \quad |f(x)| + |g(x)| > 0.$$

Тогда конус H, состоящий из функций $\alpha f + \beta g + \gamma(-1)$ $(\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0)$, является супремальным генератором $C([a, b])$ в смысле $B([a, b])$. В самом деле, зафиксируем точку $z \in [a, b]$ и выберем числа $\alpha, \beta > 0$ так, чтобы $\alpha/\beta = -g'(z)/f'(z)$. Имеем $\alpha f'(z) + \beta g'(z) = 0$, $\alpha f(z) + \beta g(z) > 0$. Нетрудно проверить, что функция $h = \alpha f + \beta g + \gamma(-1)$, где $\gamma = \alpha f(z) + \beta g(z)$, удовлетворяет всем условиям предложения 3.3, откуда и следует требуемое утверждение.

Пример 3.2. Трехмерное подпространство H пространства $C([a, b])$ представляет собой супремальный генератор $C([a, b])$ в смысле $B([a, b])$ в том и только в том случае, когда оно является линейной оболочкой трех функций f_1, f_2, f_3, образующих чебышевскую систему на отрезке $[a, b]$. Это утверждение принадлежит, по существу, П. П. Коровкину [88]. Напомним, что функции $f_i \in C([a, b])$ $(i = 1, 2, 3)$ образуют чебышевскую на $[a, b]$ систему, если для любых различных x_1, x_2, x_3 из $[a, b]$ выполняется условие

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & f_1(x_3) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & f_2(x_3) \\ f_3(x_1) & f_3(x_2) & f_3(x_3) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Необходимость высказанного утверждения проверяется просто. Достаточность может быть проверена с помощью следующих предложений. Пусть H — линейное подпространство пространства $C([a, b])$, натянутое на элементы чебышевской системы 3-го порядка. Можно показать, что H содержит сильно отрицательный элемент и, кроме того, для любой точки $z \in (a, b)$ найдется функция $h \in H$ такая, что $h(z) = 0$ и $h(x) < 0$ $(x \in [a, b] \setminus \{z\})$. Это означает, что (a, b) содержится в границе Шоке подпространства H. Из определения чебышевской системы вытекает, что точки a и b также входят в границу Шоке. (Доказательства использованных свойств чебышевской системы содержатся, например, в [88]). Итак, граница Шоке H совпадает с $[a, b]$ и, стало быть, H — супремальный генератор.

Пример 3.3.[1] Пусть μ — положительная радоновская мера на компакте Q; $\mu \neq 0$. Полупространство $H = \{h \in C(Q) : \mu(h) \leqslant 0\}$ является супремальным генератором $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ в том и только в том случае, когда носитель меры μ содержит более одной точки (т. е. $\mu \neq \lambda\varepsilon_x$, где $x \in Q$, $\lambda > 0$).

В самом деле, если $\mu = \lambda\varepsilon_x$ ($x \in Q$, $\lambda > 0$), то точка x не входит в границу Шоке конуса H. Пусть носитель μ содержит более одной точки. Для любой точки $z \in s(\mu)$ и достаточно малой окрестности V_z этой точки найдем функцию $h \in C(Q)$ такую, что $h(z) = 0$; $h(x) < 0$ $(x \in Q \setminus \{z\}$; $h(x) = -\lambda$ $(x \in Q \setminus V_z)$; здесь λ настолько большое положительное число, что $\mu(h) < 0$. Отметим, что $-1 \in H$. Из предложения 3.3 вытекает, что H — супремальный генератор.

Вернемся к изучению конечных супремальных генераторов $C(Q)$ в смысле $B(Q)$. Нас интересует, каким должен быть компакт Q, чтобы пространство $C(Q)$ имело конечный генератор, а также какова минимальная «размерность» генератора.

Введем в связи с этим следующие определения. Семейство функций $(f_1, \ldots, f_m)$ есть *супремальный базис* в пространстве $C(Q)$, если конус $H = \left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i : \alpha_i \geqslant 0\right\}$ супремально порождает пространство $C(Q)$ в смысле $B(Q)$. Если, кроме того, $f_1 = -1$, то функции $f_2, \ldots, f_m$ называются *супремальными образующими* $C(Q)$. Минимальное число супремальных образующих $C(Q)$ называется *супремальным рангом* пространства $C(Q)$ (или компакта Q) и обозначается $\operatorname{sim}(Q)$. (Это определение оправдано, в частности, тем, что супремальные ранги гомеоморфных компактов совпадают). Минимальное число функций, составляющих супремальный базис в пространстве $C(Q)$, обозначим $\operatorname{Sim}(Q)$ (это так называемый *полный супремальный ранг*). Если число $\operatorname{Sim}(Q)$ определено, то, как следует из определений, либо $\operatorname{Sim}(Q) = \operatorname{sim}(Q) + 1$, либо $\operatorname{Sim}(Q) = \operatorname{sim}(Q)$.

[1] Этот пример принадлежит С. Ф. Малыхиной.

Из предложения 3.2 немедленно вытекает, что для компакта Q, лежащего в n-мерном пространстве R^n, выполняется неравенство $\operatorname{sim}(Q)\leqslant n+1$. Справедливо и обратное утверждение.

Семейство непрерывных на Q функций $(f_1, \ldots, f_m)$ назовем *2-разделяющим*, если следы функций $f_1,\ldots, f_m$ на любое двухэлементное подмножество Q' компакта Q образуют супремальный базис в пространстве R^2 (т. е. в $C(Q')$).

Из теоремы 3.1 следует, что конус H в R^2 является супремальным генератором R^2 в том и только в том случае, если найдется число $\delta\in(0;1)$ такое, что H содержит точки $(-1, \delta)$; $(\delta, -1)$.

Таким образом, семейство $(f_1, \ldots, f_m)$ будет 2-разделяющим в том и только в том случае, если для любых двух точек x, $y\in Q$ найдется число $\delta\in(0,1)$ и наборы неотрицательных чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) = -1; \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(y) = \delta;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i(x) = \delta; \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_i f_i(y) = -1.$$

Супремальный базис является 2-разделяющим семейством (это вызвано тем, что понятие H-выпуклой функции носит локальный характер).

Имеет место

Предложение 3.4. *Если на компакте Q существует 2-разделяющее семейство $(f_0, f_1,\ldots, f_{n+1})$ такое, что $f_0(x)<0$ $(x\in Q)$, то Q топологически вкладывается в R^n (т. е. множество Q гомеоморфно некоторому подмножеству R^n).*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\psi: x \longrightarrow (f_0(x), \ldots, f_n(x))$. Ясно, что ψ — это топологическое вложение Q в R^{n+1}. Покажем, что любой луч, исходящий из нуля, содержит не более, чем одну точку множества $\psi(Q)$. В противоположном случае для некоторых x, $y\in Q$ найдется число $\alpha>0$ такое, что $f_j(x)=\alpha f_j(y)$ $(j=0,\ldots, n)$, т. е. точки $(f_j(x), f_j(y))$ $(j=0,\ldots,n)$ пространства R^2 лежат на одной прямой, проходящей через сильно отрицательный элемент. При любом расположении элемента $(f_{n+1}(x), f_{n+1}(y))$ конус в R^2, натянутый на точки $(f_j(x), f_j(y))$ $(j=0, 1, \ldots, n+1)$, не является супремальным генератором R^2, а это противоречит тому, что $(f_0, \ldots, f_{n+1})$ 2-разделяющее семейство.

Из изложенного следует, что отображение $\Phi(x)= =\psi(x)/|\psi(x)|$ (где $|\cdot|$ — евклидова норма) гомеоморфно отображает Q в единичную сферу Z_{n+1} пространства R^{n+1}. Поскольку $f_0(x)<0$ для любого $x\in Q$, то образ $\Phi(Q)$ компакта Q не совпадает со всей сферой, откуда и вытекает справедливость предложения.

Замечание. Из доказательства следует, что предложение останется справедливым, если условие «$f_0(x)<<0$ $(x\in Q)$» заменить условием «компакт Q не гомеоморфен сфере Z_{n+1}».

Из предложений 3.2 и 3.4 вытекает следующая

Теорема 3.2. *Супремальный ранг* $\mathrm{sim}(Q)$ *компакта* Q *равен* $n+1$ $(n\geqslant 1)$ *в том и только в том случае, если наименьшая размерность евклидова пространства, в которое* Q *топологически вкладывается, равна* n.

Из замечания к предложению 3.4 следует, что в случае, если компакт Q не гомеоморфен сфере, то минимальное число функций, составляющих супремальный базис $(\mathrm{Sim}(Q))$, совпадает с $\mathrm{sim}(Q)+1$. В дальнейшем будет показано (см. пункт 6°), что в случае сферы это утверждение неверно.

Введем понятие о *системе Коровкина* (K-системе). Так называется система $\varphi=(f_1, \ldots, f_m)$ непрерывных функций на компакте Q, обладающая тем свойством, что натянутое на нее подпространство H_φ пространства $C(Q)$ является супремальным генератором в $C(Q)$.

Нетрудно видеть, что если семейство $\varphi=(f_1, \ldots, f_m)$ является K-системой на компакте Q, то найдутся функции $g_2, \ldots, g_m$ такие, что семейство $\psi=(-1, g_2, \ldots, g_m)$ также будет являться K-системой. В самом деле, поскольку подпространство H_φ супремально порождает $C(Q)$, то в нем содержится сильно отрицательный элемент f_φ. Выберем в H_φ базис $\varphi'=\left(f_\varphi, f_2', \ldots, f_m'\right)$ (не уменьшая общности, можно считать размерность H_φ равной m). Подпространство H_ψ, где $\Psi=\left(-1, \frac{f_2'}{-f_\varphi}, \ldots, \frac{f_m'}{-f_\varphi}\right)$ также супремально порождает $C(Q)$ и, стало быть, ψ есть K-система. В случае супремального порождения конусами такое построение, вообще говоря, невозможно. Поэтому различие между супремальными базисами и супремальными образующими существенно.

Супремальный ранг является несколько более тонкой характеристикой компакта, чем минимальный ранг систем Коровкина. В качестве примера отметим, что супремальные ранги отрезка и окружности равны соответственно двум и трем, в то время как минимальные ранги систем Коровкина этих пространств, как известно [169], совпадают.

В заключение этого пункта приведем еще одну характеристику супремального базиса.

Предложение 3.5. *Пусть* $f_i \in C(Q)$ $(i=1, \ldots, m)$ *и* $\psi: Q \longrightarrow R^m$ *отображение, определенное формулой* $x \longrightarrow (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. *Функции* $f_1, \ldots, f_m$ *образуют супремальный базис пространства* $C(Q)$ *в том и только в том случае, если для каждой функции* $f \in C(Q)$ *найдется монотонный (в смысле порядка, индуцированного конусом* R_+^m*) сублинейный функционал* $p: R^m \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ *такой, что* $f = p \bigcirc \psi$.

Доказательство. Как показано в примере 1.2.5, сублинейный функционал p монотонен в том и только в том случае, если существует подмножество A конуса R_+^m такое, что

$$p(x) = \sup_{a \in A} (a, x) \tag{3.3}$$

(здесь символом $(\cdot, \cdot)$, как обычно, обозначено скалярное произведение в R^m).

Пусть U — подмножество конуса H, натянутого на образующие $f_1, \ldots, f_m$. Положим $A = \left\{a \in R_+^m : \sum_{i=1}^m a_i f_i \in U\right\}$ и через p обозначим функционал, построенный по множеству A с помощью формулы (3.3). Доказательство предложения вытекает из следующих равенств:

$$\sup_{h \in U} h(x) = \sup_{a \in A} \sum_{i=1}^m a_i f_i(x) = \sup_{a \in A} (a, \psi(x)) = (p \bigcirc \psi)(x).$$

4°. Конечнопорожденные K-пространства. В этом пункте[1] рассматриваются супремальные генераторы K-пространства Y в себе (т. е. в смысле самого себя;

[1] Основные результаты этого пункта принадлежат Н. В. Рутковскому [149].

в обозначениях пункта 1° векторное подпространство X совпадает с Y). Нас интересуют лишь конечные генераторы. Введем в связи с этим следующее определение. K-пространство Y называется *конечнопорожденным*, если в нем существует конечный супремальный генератор относительно самого себя. На основе предложения 3.1 конечнопорожденное пространство является пространством ограниченных элементов. Нетрудно установить, что справедливо

Предложение 4.1. *K-пространство Y конечнопорождено в том и только в том случае, если найдется конечномерный компакт Q такой, что Y изоморфно K-пополнению $\widehat{C(Q)}$ пространства $C(Q)$.*

Доказательство. Если Q — конечномерный компакт, то $C(Q)$ имеет конечный генератор H в смысле $B(Q)$. Конус H будет генератором $C(Q)$ и в смысле $\widehat{C(Q)}$. Поскольку $C(Q)$ супремально порождает $\widehat{C(Q)}$, то H является генератором и в $\widehat{C(Q)}$.

Пусть Y конечнопорожденное K-пространство и конус H, натянутый на образующие $h_1, \ldots, h_m$, супремально порождает Y в себе. Не уменьшая общности, можно считать, что Y реализовано как пространство непрерывных функций на некотором компакте $\tilde{Q}$. Определим отображение $\Phi : \tilde{Q} \longrightarrow R^m$ формулой $\Phi(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x))$ и Q обозначим конечномерный компакт, являющийся образом $\tilde{Q}$ при этом отображении.

Отображение Φ порождает изоморфное вложение пространства $C(Q)$ в $C(\tilde{Q})$ по формуле $f \longrightarrow f \circ \Phi$. Образ $C(Q)$ при этом вложении содержит H и, стало быть, супремально порождает $C(\tilde{Q}) = Y$. Из этого следует, что K-пополнение пространства $C(Q)$ изоморфно Y. Предложение доказано.

Дальнейшее изучение конечнопорожденных K-пространств опирается на следующее

Предложение 4.2. *Если Q — компактное топологическое пространство, то база K-пространства $C(Q)$ изоморфна булевой алгебре всех регулярных замкнутых подмножеств компакта Q.*

Приведем некоторые сведения, которые понадобятся нам при доказательстве этого предложения[1]. Базой

[1] Читатель, незнакомый с теорией булевых алгебр, может без ущерба для дальнейшего пропустить оставшуюся часть этого пункта.

K-пространства называется булева алгебра его единичных элементов. Булева алгебра сепарабельна, если она обладает счетным плотным подмножеством. (Подмножество S булевой алгебры B называется плотным, если оно минорирует B в том смысле, что для любого $b \in B$, $b \neq -\infty$ найдется элемент $s \in S$, $s \neq -\infty$ такой, что $s \leqslant b$; здесь $-\infty$ наименьший элемент алгебры B.)

Приведем описание пространства $\widehat{C(Q)}$, где Q — компактное топологическое пространство. Обозначим $\widetilde{C(Q)}$ множество всех вещественных функций, заданных, непрерывных и ограниченных на множествах в Q, дополнительных к тощим множествам (т. е. на всюду плотных множествах). Функции φ_1, $\varphi_2 \in \widetilde{C(Q)}$ называются эквивалентными, если совпадают на пересечении своих областей определения. Можно показать (см., например, [37]), что пространство $\widehat{C(Q)}$ представляет собой (с точностью до изоморфизма) фактор-пространство $\widetilde{C(Q)}$ по введенному отношению эквивалентности с естественным определением алгебраических операций и отношения порядка. Класс из $\widehat{C(Q)}$, содержащий функцию φ из $\widetilde{C(Q)}$, обозначим $[\varphi]$. Опишем участвующую в формулировке предложения булеву алгебру всех регулярных замкнутых подмножеств компакта Q. Замкнутое подмножество этого компакта называется *регулярным*, если оно совпадает с замыканием некоторого открытого множества. Совокупность F_Q всех регулярных замкнутых подмножеств Q упорядочим по включению. Нетрудно проверить, что при этом F_Q становится полной дистрибутивной структурой: если $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset F_Q$, то

$$\bigvee_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}; \quad \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \overline{\operatorname{int}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)}.$$

Кроме того, для каждого A в F_Q существует дополнение A' (в качестве A' выступает замыкание множества $Q \setminus A$). Таким образом, F_Q — полная булева алгебра. Заметим, что совокупность всех замкнутых регулярных окрестностей является плотным в алгебре F_Q множеством. Если, в частности, Q обладает счетной базой окрестностей, то алгебра F_Q сепарабельна.

Доказательство предложения 4.2. Пусть A входит в булеву алгебру F_Q всех регулярных замкнутых подмножеств Q. Функция e_A, определенная на $Q \setminus \partial A$ (где ∂A — граница A) формулой

$$e_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in \operatorname{int} A \\ 0 & x \in Q \setminus A, \end{cases}$$

входит в $\widetilde{C(Q)}$. Заметим, что для всех $x \in Q \setminus \partial A$ выполняется равенство $(1 - e_A(x)) \wedge e_A(x) = 0$. Отсюда следует, что $([1] - [e_A]) \wedge [e_A] = 0$, т. е. $[e_A]$ является единичным элементом K-пространства $\widehat{C(Q)}$. Очевидно, что отображение $\varphi : A \longrightarrow [e_A]$ является изоморфизмом алгебры F_Q в булеву алгебру B_Q единичных элементов $\widehat{C(Q)}$. Пусть e' — ненулевой единичный элемент B_Q. По определению K-пополнения выполняется равенство $e' = \sup U_{e'}$, где $U_{e'} = \{[f] \in \widehat{C(Q)} : f \in C(Q),\ f \leqslant e'\}$. Так как $e' > 0$ и $0 \in U_{e'}$, то найдется функция $f_0 \in C(Q)$ такая, что $0 < [f_0] \leqslant e'$. Ясно, что $f_0 > 0$. В открытом множестве $\{x \in Q : f_0(x) > 0\}$ выберем регулярное замкнутое подмножество A. Класс $[f_0]$ принадлежит компоненте I (см. [41]) пространства $\widehat{C(Q)}$, порожденной элементом e'. Поскольку $\lambda[f_0] \geqslant e_A$ при достаточно больших λ, то $[e_A] \in I$. Тем самым показано, что изоморфизм φ отображает полную булеву алгебру F_Q в полную плотную подалгебру базы пространства $\widehat{C(Q)}$. Из известной теоремы из теории булевых алгебр [152] следует, что алгебра F_Q изоморфна этой базе. Предложение доказано.

Следствие. *Если компакт Q конечномерен, то база пространства $\widehat{C(Q)}$ сепарабельна.*

Предложение 4.3. *Пусть K-пространство ограниченных элементов Y имеет сепарабельную базу. Найдется компактное подмножество Q числовой прямой R такое, что Y изоморфно $\widehat{C(Q)}$.*

Доказательство. Пусть F — база пространства Y. Нетрудно проверить, что F содержит счетную плотную подалгебру F'. Стоуновский компакт Q алгебры F' имеет размерность нуль. Кроме того, из сепарабельности F' следует (см. [152]), что Q метризуем. По теореме Менгера — Небелинга [95] компакт Q топологически вкладывается в R. Алгебра F' изоморфна базе K-линеала $C(Q)$ и, так как Q вполне несвязен, ее пополнение (алгебра F) изоморфно базе K-пространства $\widehat{C(Q)}$.

Итак, K-пространства ограниченных элементов Y и $C(\widehat{Q})$ имеют изоморфные базы. Отсюда следует, что они и сами изоморфны. Предложение доказано.

Прежде чем сформулировать основную теорему, докажем

Предложение 4.4. *Если K-пространство Y имеет супремальный генератор H (в себе), являющийся двумерным подпространством, то Y изоморфно пространству R^2.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что Y реализовано как $C(Q)$, где Q — экстремальный вполне несвязный компакт. Так как подпространство H является генератором, то оно содержит сильно отрицательный элемент, который, не уменьшая общности, можно считать равным -1. Пусть h' функция из H, линейно независимая с единицей. Положим

$$E_1 = \left\{x \in Q : h'(x) = \max_{y \in Q} h'(y)\right\};$$

$$E_2 = \left\{x \in Q : h'(x) = \min_{y \in Q} h'(y)\right\}.$$

Любая функция $h \in H$ имеет вид $h = \alpha h' + \beta 1$ ($\alpha, \beta \in R$) и потому достигает максимума или на всем Q (если $\alpha = 0$), или на E_1 (если $\alpha > 0$), или на E_2 (если $\alpha < 0$). Если $E_1 \cup E_2 = Q$, то любая функция $h \in H$ имеет вид $h = \alpha\chi_{E_1} + \beta\chi_{E_2}$ (где χ_{E_i} характеристическая функция E_i ($i = 1, 2$)). Отсюда следует, что Y изоморфно R^2. Пусть $E_1 \cup E_2 \neq Q$ и $\bar{x} \in Q \setminus (E_1 \cup E_2)$. Используя лемму Урысона, построим функцию $f \in C(Q)$ такую, что $f(\bar{x}) = 1$; $f(x) = 0$ $(x \in E_1 \cup E_2)$; $1 \geqslant f(x) \geqslant 0$ $(x \in Q)$.

Пусть $h \in H$ и $h \leqslant f$. Тогда $\max h(Q) = \max h(E_1 \cup E_2) = 0$, т. е. $h \leqslant 0$. Из сказанного следует, что $\sup\{h \in H : h \leqslant f\} \leqslant 0$, а это противоречит тому, что H супремальный генератор. Предложение доказано.

Замечание. Подобным же образом можно показать, что пространство $C(Q)$, где Q произвольный компакт, содержащий более двух точек, не имеет двумерных генераторов в смысле $B(Q)$.

Из доказанных выше предложений вытекает следующая

Теорема 4.1. *Пусть Y есть K-пространство, не изоморфное R^1 и R^2. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Y конечнопорождено;*

(2) Y *изоморфно* $\widehat{C(Q)}$, *где* Q — *конечномерный компакт;*

(3) Y *является* K*-пространством ограниченных элементов с сепарабельной базой;*

(4) *минимальное число образующих, которое может иметь супремальный генератор пространства* Y *в себе, равно трем.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь импликация (3)$\Rightarrow$(4). На основе предложения 4.3 Y изоморфно $\widehat{C(Q)}$, где Q — компакт, лежащий в R. Генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$ будет и генератором $\widehat{C(Q)}$, поэтому, как следует из теоремы 3.2, $\widehat{C(Q)}$ (а стало быть, и Y) имеет генераторы в себе, натянутые на три образующие. Из предложения 4.4 видно, что генераторов, натянутых на две образующие, Y не имеет.

Пример 4.1. Рассмотрим K-пространство l^∞ всех ограниченных последовательностей; $l^\infty = B(N)$ где N — множество натуральных чисел. Ясно, что l^∞ есть K-пространство ограниченных элементов. Кроме того, его база сепарабельна (ее счетным плотным подмножеством служит, например, совокупность всех ортов $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, \ldots, 0, \ldots))$. Таким образом, l^∞ конечно-порождено и, стало быть, имеет генератор в себе, натянутый на три образующих.

Пример 4.2. Пространство $L^\infty([0, 1])$ всех почти всюду (по мере Лебега) ограниченных на $[0,1]$ функций не является конечнопорожденным. Как и при доказательстве предложения 4.1, можно показать, что база $L^\infty([0, 1])$ изоморфна фактор-алгебре борелевских множеств в $[0, 1]$ по идеалу множеств лебеговой меры нуль. Известно (см. [152]), что эта фактор-алгебра не сепарабельна, откуда и следует наше утверждение.

5°. Супремальные генераторы относительно множества функционалов. Здесь рассматривается еще один случай конструкции супремального порождения. Предварительно введем определение H-максимальной меры в более общей, чем ранее, ситуации.

Рассмотрим локально выпуклое пространство V, упорядоченное конусом K. Конус H в пространстве V назовем *минорирующим*, если для любого $v \in V$ множество $U_v = \{h \in H : h \leqslant v\}$ непусто. (В случае, если

V содержится в K-пространстве Y и порядок в V индуцирован из Y, это определение совпадает с данным ранее). Если K телесен, то конус H является минорирующим в том и только в том случае, если он содержит сильно отрицательный элемент (т. е. внутренний элемент конуса $-K$).

Для конуса H в V и функционала ν из K^* положим

$$\mathrm{Spr}_V(\nu, H) = \{\mu \in V' : \mu \geqslant 0,\ \mu - \nu \in H^*\} = \\ = K^* \cap (\nu + H^*).$$

Функционал ν назовем *H-максимальным*, если $\mathrm{Spr}_V(\nu, H) = \{\nu\}$. Если конус K телесен, то нетрудно проверить, несколько модифицируя доказательство теоремы 2.7.1, что H-максимальные функционалы существуют в том и только в том случае, если H — минорирующий конус.

В общем случае, можно утверждать, что справедливо следующее

Предложение 5.1. *На конусе H существует H-максимальный функционал в том и только в том случае, если конус $\overline{H+K}$ всех элементов, минорируемых элементами конуса H, плотен в V.*

При доказательстве будем использовать соотношение $(H+K)^* = H^* \cap K^*$, вытекающее из предложения 1.6.3.

Необходимость. Предположим, что $\overline{H+K} \neq V$. Тогда $(H+K)^* = H^* \cap K^*$ содержит ненулевой функционал μ. Для любого $\nu \in K^*$ имеем $\mu + \nu \in K^* \cap (\nu + H^*) = \mathrm{Spr}_V(\nu, H)$, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть $\overline{H+K} = V$. Тогда $(H+K)^* = H^* \cap K^* = \{0\}$. Из сказанного следует, что функционал $\mu = 0$ является H-максимальным. Предложение доказано.

В дальнейшем необходимо следующее обобщение теоремы 2.7.2.

Предложение 5.2. *Пусть пространство V таково, что каждый аддитивный однородный положительный функционал непрерывен. Пусть далее H — минорирующий конус в V. Функционал $\mu \in K^*$ является M-максимальным в том и только в том случае, если для любого элемента $v \in V$ выполняется соотношение*

$$\mu(v) = \sup_{h \leqslant v,\, h \in H} \mu(h).$$

Доказательство. Пусть μ является H-максимальным функционалом. Так как H минорирующий конус, то на пространстве V можно рассмотреть конечный функционал q: $v \longrightarrow \sup\{\mu(h): h \in U_v\}$. Этот функционал положительно однороден и супераддитивен и потому, как следует из теоремы Хана — Банаха, для любой точки $v_0 \in V$ найдется ненулевой аддитивный и однородный функционал ν такой, что

$$q(v_0) = \nu(v_0); \; \nu(v) \geqslant q(v) \quad (v \in V). \tag{5.1}$$

Так как q — монотонный функционал, то ν положителен на K и, стало быть, непрерывен.

Для $v \in V$ выполняется неравенство $q(v) \leqslant \mu(v)$. Предположим, что для некоторого элемента v_0 справедливо соотношение $q(v_0) < \mu(v_0)$. Найдем для элемента v_0 функционал $\nu \in K^*$, удовлетворяющий условию (5.1). Нетрудно проверить, что $\nu \neq \mu$ и $\nu \in \mathrm{Spr}_V(\mu, H)$, что противоречит H-максимальности μ. Необходимость доказана. Достаточность проверяется так же, как и в теореме 2.7.2. Предложение доказано полностью.

Заметим, что непрерывность каждого аддитивного однородного положительного функционала можно гарантировать, например, в случае, если конус K телесен или V — пространство Фреше, а K — воспроизводящий конус. (Доказательство смотрите в монографии Шефера [174], где приводятся и другие достаточные условия.)

Пусть M — подмножество конуса K^*. Конус H является *супремальным генератором* V (супремально порождает V) *относительно множества* M, если H — минорирующий и для любого $v \in V$ выполняется

$$\mu(v) = \sup_{h \in H, h \leqslant v} \mu(h) \quad (\mu \in M). \tag{5.2}$$

Переформулируем это определение в несколько иных терминах. С этой целью рассмотрим K-пространство R^M всех функций, определенных на M, и оператор $J: V \to R^M$, определенный следующим образом:

$$Jv(\mu) = \mu(v) \quad (\mu \in M, \; v \in V).$$

Равенство (5.2) можно записать так:

$$Jv = \sup_{h \leqslant v, h \in H} Jh \quad (v \in V),$$

где супремум берется в R^M.

При любом $v \in V$ функция Jv непрерывна (считается, что в M индуцирована топология $\sigma(V', V)$). Кроме того, J — положительный оператор, ядро которого совпадает с 0 в том и только в том случае, если M разделяет точки из V. Множество $\{h \in H : \mu(h) \leqslant \mu(v) \quad (\mu \in M)\}$, вообще говоря, шире, чем U_v и поэтому генератор пространства $J(V)$ в смысле R^M не обязан совпадать с генератором V относительно M. Тем не менее, генераторы относительно M оказываются полезными при изучении сходимости последовательностей функционалов.

Отметим, что заключение предложения 5.2 можно изложить так: минорирующий конус H является супремальным генератором относительно множества $\{\mu\}$ в том и только в том случае, если функционал μ H-максимален.

Имеет место

Теорема 5.1. *Пусть V — локально выпуклое пространство, упорядоченное конусом K, причем каждый однородный аддитивный положительный функционал непрерывен. Пусть, далее, H — минорирующий конус в V и M — подмножество K^*. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *H — супремальный генератор V относительно M;*

(2) *для каждого функционала $\mu \in M$ любая последовательность (μ_n) такая, что $\mu_n \in K^*$ и $\varliminf_n \mu_n(h) \geqslant \mu(h)$ при всех $h \in H$, слабо сходится к μ;*

(3) *каждый функционал $\mu \in M$ является H-максимальным.*

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ доказывается так же, как предложение 1.1, импликация $(2) \Rightarrow (3)$ очевидна, импликация $(3) \Rightarrow (1)$ следует из предложения 5.2.

Замечание 1. Если конус K телесен, то требование минорантности конуса H излишне.

Замечание 2. Рассмотрим случай, когда V совпадает с пространством $C(Q)$, где Q — компакт. Здесь множество HM всех $P(H)$-максимальных мер (где H — минорирующий конус в $C(Q)$) является конусом. В самом деле, если $\mu, \nu \in HM$, то по теореме Макободского для $f \in C(Q)$ выполняются равенства $\mu(f) = \mu(\mathrm{co}_H f)$; $\nu(f) = \nu(\mathrm{co}_H f)$, откуда следует, что $(\mu+\nu)(f) = (\mu+\nu)(\mathrm{co}_H f)$ (напомним, что по определению $(\mathrm{co}_H f)(x) = \sup\{h(x) : h \leqslant f, h \in H\}$). Вновь используя теорему Макободского, получим, что $\mu+\nu\in HM$. Таким же образом проверяется, что $\mu\in HM\Leftrightarrow c\mu\in HM$ $(c>0)$. Ясно, что $P(H)$-максимальную меру μ можно рассматривать, как оператор $\mu: C(Q)\longrightarrow R$, перестановочный на минорирующем конусе $P(H)$ с операцией sup. Привлекая следствие к предложению 1.5, получим, что подпространство $HM-HM$ пространства $C'(Q)$ является K-пространством и, следовательно, конус HM (вполне) миниэдрален. Напомним, что основание миниэдрального конуса называется *симплексом*. Таким образом, множество $S=\{\mu'\in HM: \mu'(1)=1\}$ является симплексом (см., в частности, [17]).

Предположение о том, что конус H является минорирующим, в случае нетелесного конуса весьма ограничительно. Покажем, что некоторый аналог теоремы 5.1 имеет место и в случае, если это предположение не выполнено. Введем предварительно определение. Пусть V — локально выпуклое пространство, упорядоченное конусом K, а M — некоторое множество положительных на K линейных функционалов. Конус H, лежащий в пространстве V, назовем *обобщенным супремальным генератором* V относительно M, если для любых $v\in V$ и $\mu\in M$ выполняется равенство

$$\mu(v)=\sup_{(v_\alpha)}\overline{\lim_{\alpha}}\sup_{h\leqslant v_\alpha, h\in H}\mu(h),$$

где внешний супремум берется по всем сетям $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$ таким, что

$$v_\alpha\in H+K\quad(\alpha\in A);\quad v_\alpha\xrightarrow[\alpha]{} v.$$

Заметим, что в случае, если K телесен, то обобщенный супремальный генератор совпадает с обычным супремальным генератором. Это вытекает, например, из теоремы 5.2, если привлечь теорему 5.1 и замечание 1 к ней.

Данное определение оправдывается следующим утверждением.

Теорема 5.2. *Пусть V — локально выпуклое пространство, упорядоченное конусом K и $M\subset K^*$. Пусть, далее, H — конус в V. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *H — обобщенный супремальный генератор V относительно M;*

(2) *для каждого* $\mu \in M$ *любая равностепенно непрерывная последовательность* (μ_n) *такая, что* $\mu_n \in K^*$ *и* $\underline{\lim}_n \mu_n(h) \geqslant \mu(h)$ *при всех* $h \in H$, *слабо сходится к* μ;

(3) *каждый функционал* $\mu \in M$ *является* H-*максимальным.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть (μ_n) — последовательность, фигурирующая в (2). Для $v \in V$ положим $p(v) = \underline{\lim}_n \mu_n(v)$. Функционал p, определенный на V таким образом, супераддитивен и положительно однороден. Так как последовательность (μ_n) равностепенно непрерывна, то найдется окрестность нуля в пространстве V такая, что $|\mu_n(w)| \leqslant 1$ для w из этой окрестности. Функционал p ограничен на этой окрестности. Из сказанного вытекает непрерывность p (см. пример 1.2.3).

Рассуждая так же, как и в предложении 1,1, получим, что для $u \in H+K$ выполняется соотношение

$$\underline{\lim}_n \mu_n(u) \geqslant \sup_{h \leqslant u, h \in H} \mu(h). \tag{5.3}$$

Введем в рассмотрение функционал $q : V \longrightarrow \bar{R}$, положив $q(v) = \sup \mu(U_v)$ для $v \in V$. Если $v \bar{\in} H+K$, то $U_v = \{h \in H : h \leqslant v\} = \varnothing$ и поэтому $q(v) = -\infty$. Функционал q супераддитивен и положительно однороден. Рассмотрим его замыкание $\bar{q}$. Заметим, что (сравните пункт 1^0 Введения и пункт 7^0 главы I) для $v \in V$ справедливо представление

$$\bar{q}(v) = \sup_{v_\alpha \to v} \overline{\lim_\alpha} \sup_{h \leqslant v_\alpha, h \in H} \mu(h)$$

(при этом во внешнем супремуме можно ограничиться лишь сетями, элементы которых лежат в $H+K$). Отметим, что в силу (1) $\bar{q} = \mu$. Из формулы (5.3) следует, что для $v \in V$ справедливо неравенство $p(v) \geqslant q(v)$. Так как p непрерывен, то и $p(v) \geqslant \bar{q}(v) = \mu(v)$. Таким образом, для всех v имеет место соотношение $\underline{\lim}_n \mu_n(v) \geqslant \mu(v)$, откуда и следует требуемое.

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Заметим, прежде всего, что на основе предложения 5.1 конус $H+K$ плотен в V. Пусть теперь $\mu \in M$. Построим, как и при доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2), функционал $q : v \longrightarrow \sup \mu(U_v)$ и рассмотрим

его замыкание $\bar{q}$. Функционал $\bar{q}$ является нижней огибающей опорных к нему линейных функционалов. Пусть ν опорен к $\bar{q}$. Так как $\bar{q}$ монотонен, то $\nu \in K^*$. Кроме того, $\nu(h) \geqslant \bar{q}(h) = \mu(h)$ для $h \in H$. Таким образом, $\nu \in \in \mathrm{Spr}_V(\mu, H)$ и, стало быть, $\nu = \mu$. Отсюда следует, что $\bar{q} = \mu$. Теорема доказана.

Ниже приводятся примеры использования этой теоремы.

Пример 5.1. Пусть V — локально выпуклое пространство, упорядоченное конусом K. Точка u называется *точкой гладкости конуса* K, если $u \in K$ и существует единственный (с точностью до положительного множителя) функционал μ_u из K^* такой, что $\mu_u \neq 0$, $\mu_u(u) = 0$. Про функционал μ_u говорят, что он проходит через точку u.

Предложение 5.3. *Пусть u — точка гладкости конуса K и элемент u_1 из V таков, что $\mu_u(u_1) \neq 0$. Если равностепенно непрерывная последовательность положительных функционалов (μ_n) такова, что $\mu_n(u) \longrightarrow 0$, $\mu_n(u_1) \longrightarrow \mu_u(u_1)$, то (μ_n) слабо сходится к μ_u.*

Для доказательства достаточно заметить, что $\mathrm{Spr}_V(\mu_u, H) = \{\mu_u\}$, и воспользоваться теоремой 5.2 (здесь через H обозначена плоскость в V, проходящая через точки u и u_1).

Точки гладкости ввели в рассмотрение В. С. Климов, М. А. Красносельский и Е. А. Лифшиц [85]. Там же приведено предложение 5.3 для случая, когда V банахово пространство.

Пример 5.2. Этот пример является обобщением предыдущего (он рассмотрен без привлечения понятия супремального генератора в [113]).

Точка u называется *точкой порядка* m, если $u \in K$ и существуют не более чем m линейно независимых функционалов из K^* таких, что в точке u все они обращаются в нуль. Отметим, что точка порядка 1 является точкой гладкости конуса.

Пусть, далее, $x_1, \ldots, x_m$ — такие точки исходного пространства V, что

$$\begin{vmatrix} \mu_1(x_1) & \mu_2(x_1) & \ldots & \mu_m(x_1) \\ \mu_1(x_2) & \mu_2(x_2) & \ldots & \mu_m(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_1(x_m) & \mu_2(x_m) & \ldots & \mu_m(x_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

(здесь $\mu_1, \ldots, \mu_m$ линейно независимые положительные функционалы, обладающие тем свойством, что $\mu_i(u)=0$ $(i=1, \ldots, m)$).

Предложение 5.4. *Пусть u — точка порядка m и точки $x_1, \ldots, x_m$ из V выбраны, как указано выше. Если равностепенно непрерывная последовательность положительных функционалов (μ_n) такова, что $\mu_n(u) \longrightarrow 0$, $\mu_n(x_k) \longrightarrow \mu(x_k)$ $(k=1, \ldots, m)$, где μ произвольный положительный функционал, причем $\mu(u)=0$, то последовательность (μ_n) слабо сходится к μ.*

Доказательство. Обозначим через H подпространство в V, натянутое на точки $u, x_1, \ldots, x_m$. Заметим, что положительный росток функционала μ на H совпадает с $\{\mu\}$. В самом деле, пусть $\bar{\mu} \in \mathrm{Spr}_V(\mu, H)$, тогда $\bar{\mu}(u)=0$ и, следовательно, найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ такие, что $\bar{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu_i$. С другой стороны, $\mu = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu_i$. Таким образом, положив $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$, получим, что γ_i удовлетворяют однородной системе линейных уравнений $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mu_i(x_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ и, следовательно, из-за невырожденности матрицы коэффициентов этой системы, $\gamma_i = 0$ $(i=1, \ldots, m)$. Итак, $\mathrm{Spr}_V(\mu, H) = \{\mu\}$. Доказательство завершается ссылкой на теорему 5.2.

Рассмотрим вопрос о единственности распространения тождественного оператора с обобщенного супремального генератора.

Предложение 5.5. *Пусть подмножество M конуса K^* разделяет точки из V и H — обобщенный супремальный генератор относительно M. Каждый линейный положительный оператор $T: V \longrightarrow V$, мажорирующий на H тождественный оператор, совпадает с ним.*

Доказательство. Пусть $\mu \in M$. Для всех $h \in H$ имеем $\mu(h) \leqslant (Th) = T^*\mu(h)$. Таким образом, функционал $T^*\mu$ мажорирует μ на H. Кроме того, $T^*\mu \geqslant 0$. Итак, $T^*\mu \in \mathrm{Spr}_V(\mu, H)$ и по теореме 5.2 $T^*\mu = \mu$. Это и доказывает предложение.

Замечание 1. Если H обладает тем свойством, что для любого $\nu \in \mathrm{Spr}_V(\mu, H)$ найдется положительный линейный оператор T, мажорирующий на H тождественный и такой, что $\nu = T^*\mu$, то верно и обратное утверждение.

Замечание 2. В условиях предложения нельзя гарантировать, что из сходимости последовательности положительных операторов на H к тождественному вытекает ее сходимость всюду.

Пример 5.3. Подпространство V_0 локально выпуклого пространства V, упорядоченного конусом K, называется *насыщенным*, если множество функционалов, положительных на K и проходящих через точки гладкости (см. пример 5.1) K, лежащие в V_0, разделяет точки V.

Нетрудно проверить, используя предложение 5.5, что каждый положительный линейный оператор, совпадающий на насыщенном подпространстве с тождественным, всюду тождественен. Для случая банаховых пространств этот результат приведен в [85].

Рассмотрим случай, когда V совпадает с $C(Q)$, где Q компакт. Пусть M — множество положительных на Q мер. Через $T_c(M)$ обозначим совокупность всех операторов вида T_φ, где $(T_\varphi f)(x)=\varphi(x)(f)$ $(x\in Q,\ f\in C(Q))$, а φ — непрерывно, $\varphi: Q\longrightarrow M$. Нетрудно видеть, что теорема 2.1, дающая в различных терминах критерии супремального генератора $C(Q)$ в смысле $B(Q)$, остается справедливой и в этой ситуации. Точнее говоря, получаем верное утверждение, если в формулировке этой теоремы слова «генератор $C(Q)$ в смысле $B(Q)$» заменим на «генератор $C(Q)$ относительно M»; вместо «$\varepsilon_x(x\in Q)$» будем писать «$\mu\in M$», вместо «$T_c(Q)$» будем писать «$T_c(M)$» и, наконец, вместо равномерной сходимости на Q будем говорить о равномерной сходимости на компактных подмножествах M.

Более того, имеет место следующий общий факт, доказательство которого проведем на основе теоремы Майкла.

Пусть V — упорядоченное нормированное пространство с телесным конусом K положительных элементов, а T — равностепенно непрерывный положительный оператор $T: V\longrightarrow C(Q)$. Через $M(T)$ обозначим множество $\{T_x: v\longrightarrow (Tv)(x)\}_{x\in Q}\subset V'$. Допустим, что отображение $\Phi_T: x\longrightarrow \operatorname{Spr}(T_x, H)$ сильно полунепрерывно снизу. Тогда справедлива

Теорема 5.3. *Пусть H — конус в V. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *H — супремальный генератор пространства V относительно $M(T)$*;

(2) *любой положительный линейный оператор T' из V в $B(Q)$ такой, что $T'h\geqslant Th$ $(h\in H)$, совпадает с T*;

(3) *любая последовательность (T_n) положительных*

линейных операторов $(T_n : V \to C(Q))$ *такая, что (равномерный)* $\lim\limits_n T_n h \geqslant Th$ *для всех* $h \in H$, *сильно сходится к* T;

(4) *любой равностепенно непрерывный положительный оператор* T' *такой, что* $T'h \geqslant Th$ $(h \in H)$, *совпадает с* T.

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ следуют из теорем 2.1 и 5.1. Импликация $(3) \Rightarrow (4)$ очевидна. Установим справедливость соотношения $(4) \Rightarrow (1)$.

Допустим, что H не является супремальным генератором пространства V относительно $\{T_{x_0}\}$ при некотором $x_0 \in Q$. Это, в частности, означает, что существует $\mu' \in \in \mathrm{Spr}(T_{x_0}, H) \setminus \{T_{x_0}\}$. По следствию теоремы Майкла найдется сильно непрерывный селектор φ отображения Φ_T такой, что $\varphi(x_0) = \mu'$.

Рассмотрим равностепенно непрерывный спектр T', соответствующий φ, т. е. $(T'v)(x) = \varphi(x)(v)$. Поскольку $\varphi(x) \in \Phi_T(x)$, то $T'h \geqslant Th$ для всех $h \in H$. Кроме того, так как $\mu'(v_0) \neq T_{x_0}(v_0)$ при некотором $v_0 \in V$, то $(T'v_0)(x_0) = = \mu'(v_0) \neq T_{x_0}(v_0) = Tv_0(x_0)$, $T' \neq T$. Получили противоречие.

Пусть H — минорирующий конус в $C(Q)$. Рассмотрим его границу Шоке $\mathrm{Ch}(H)$. Из теоремы 5.1 следует, что H является супремальным генератором $C(Q)$ относительно $\mathrm{Ch}(H)$. (Напомним, что, определяя границу Шоке, мы фактически отождествляли компакт Q и множество $\{\varepsilon_z : z \in Q\}$, наделенное широкой топологией.) Это простое замечание иногда бывает полезным при изучении вопросов, связанных с границей Шоке. Приведем соответствующий пример (см. также 7⁰).

Пример 5.4[1]. Пусть Q — компактное топологическое пространство. *Резольвентой* называется семейство операторов $(R_\lambda)_{\lambda > 0}$, где $R_\lambda \in \mathscr{L}^+(C(Q), C(Q))$; $R_\lambda 1 = \frac{1}{\lambda} 1$ и, кроме того,

$$R_{\lambda'} - R_\lambda = (\lambda - \lambda') R_{\lambda'} R_\lambda. \qquad (5.4)$$

(Резольвенты возникают, в частности, при изучении марковских процессов [60, 68].) Как следует из (5.4), $R_{\lambda'} R_\lambda = R_\lambda R_{\lambda'}$ при любых $\lambda, \lambda' > 0$. Далее, $\|R_\lambda\| = \frac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$.

[1] Этот пример заимствован из книги Фелпса [159], где он рассматривался с иной точки зрения.

В самом деле, если $f \in C(Q)$, то $\pm f \leqslant \|f\| \mathbf{1}$ и потому $\pm R_\lambda f \leqslant \|f\| R_\lambda \mathbf{1} = \frac{1}{\lambda} \|f\|$. Так что $\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$. С другой стороны, $R_\lambda \mathbf{1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}$. Кроме того, операторы R_λ имеют общую область значений H. Действительно, если $f \in C(Q)$, то при любых λ и λ' имеем $R_\lambda f - R_{\lambda'} f = (\lambda' - \lambda) R_\lambda (R_{\lambda'} f)$, поэтому $R_{\lambda'} f = R_\lambda (f - (\lambda' - \lambda) R_{\lambda'} f)$, стало быть, область значений оператора $R_{\lambda'}$ содержится в области значений оператора R_λ. Имеет место следующая

Теорема Рея [136]. *Для любой функции* $f \in C(Q)$ *семейство* $(\lambda R_\lambda f)_{\lambda > 0}$ *сходится при* $\lambda \to \infty$ *к функции* f *равномерно на компактных подмножествах границы Шоке* $\mathrm{Ch}(H)$ *подпространства* H.

Доказательство. Покажем сначала, что $\lambda R_\lambda h \underset{\lambda}{\to} h$ (по норме $C(Q)$) для любого $h \in H$. Действительно, если $h \in H$, то $h = R_1 f$ при некоторой $f \in C(Q)$. Поэтому $\lambda R_\lambda h - h = \lambda R_\lambda R_1 f - R_1 f = 1 \cdot R_\lambda R_1 f - R_\lambda f = R_\lambda (R_1 f - f)$. Таким образом,

$$\|\lambda R_\lambda h - h\| \leqslant \|R_\lambda\| \|R_1 f - f\| = \frac{1}{\lambda} \|R_1 f - f\| \underset{\lambda}{\to} 0.$$

Пусть M — компактное подмножество границы Шоке $\mathrm{Ch}(H)$. Так как H является супремальным генератором относительно M, то из сходимости семейств $(\lambda R_\lambda h)_{\lambda > 0}$ к h $(h \in H)$ следует (на основе приведенной выше модификации теоремы 2.1) заключение теоремы.

6⁰. Супремальные генераторы пространства $C(Q)$ порядка n. Здесь будут рассмотрены супремальные генераторы пространства $C(Q)$ (где Q, как обычно, компакт) относительно множества M_n, состоящего из всех вероятностных мер, сосредоточенных не более, чем в n точках. Если H — супремальный генератор $C(Q)$ относительно множества M_n, то говорят, что H *супремально порождает* $C(Q)$ *с порядком* n. Если $n = 1$, то M_n можно отождествить с компактом Q (каждую точку z из Q можно рассматривать как меру Дирака ε_z). В этом случае H супремально порождает $C(Q)$ относительно K-пространства $B(Q)$.

Имеет место

Предложение 6.1. *Конус H супремально порождает пространство $C(Q)$ с порядком n в том и только в том случае, если для любых $f \in C(Q)$, $\varepsilon > 0$ и точек $x_1, \ldots, x_n$ из Q найдется функция $h \in H$ такая, что*

$$h(x) \leqslant f(x) \quad (x \in Q); \quad h(x_i) > f(x_i) - \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь необходимость.

Предполагая, что доказываемое утверждение неверно, найдем $f \in C(Q)$, $\varepsilon > 0$ и точки $x_1, \ldots, x_n \in Q$ такие, что для каждой функции $h \in H$, удовлетворяющей неравенству $h \geqslant f$, выполняется при некотором j соотношение $h(x_j) \leqslant f(x_j) - \varepsilon$. Так как $h \leqslant f$, то при $i \neq j$ справедливы неравенства $h(x_i) \leqslant f(x_i)$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant \delta > 0$ — положительные числа, удовлетворяющие лишь условию $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Для меры $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ имеем

$$\mu(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) - \varepsilon\delta = \mu(f) - \varepsilon\delta,$$

откуда следует, что $\sup\{\mu(h) : h \in U_f\} \leqslant \mu(f) - \varepsilon\delta$. Полученное неравенство противоречит тому, что H супремально порождает $C(Q)$ с порядком n. Предложение доказано.

Используя это предложение, можно привести примеры генераторов порядка n. Перейдем к изучению конечных супремальных генераторов порядка n. Конус, порождающий $C(Q)$ с порядком n, очевидно, супремально порождает $C(Q)$ с порядком $s\,(1 \leqslant s \leqslant n)$. Кроме того, как следует из результатов пункта 3^0, на компактном пространстве Q существует конечный супремальный генератор $C(Q)$ (в смысле $B(Q)$) в том и только в том случае, если пространство Q конечномерно.

Введем дополнительно несколько определений. Говорят, что семейство функций $(f_1, \ldots, f_m)$ есть *супремальный базис порядка* n в пространстве $C(Q)$, если конус $H = \left\{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_i : \alpha_i \geqslant 0\right\}$ супремально порождает пространство $C(Q)$ с порядком n. Минимальное число функций, составляющих такой базис, будем обозначать $\mathrm{Sim}_n(Q)$ и называть (полным) *супремальным рангом порядка* n.

Понятие супремального базиса тесно связано с понятием обобщенной системы Коровкина. Среди нескольких равносильных определений этой системы (см. [171]) приведем наиболее удобное.

Семейство непрерывных на Q функций $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)$ называется *обобщенной системой Коровкина порядка*

n (K_n-системой) на компакте Q, если любая положительная мера μ, обладающая тем свойством, что $\mu(f_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_i(x_j)$ при всех $i=1, \ldots, m$ (здесь $\alpha_j \geqslant 0$, $x_j \in Q$ $(j=1, \ldots, n)$), совпадает с мерой $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_{x_j}$. Обобщенная система Коровкина порядка 1 совпадает с системой Коровкина (см. пункт 3⁰). Обозначив через H_φ подпространство $C(Q)$, натянутое на функции из семейства $(f_1, \ldots$ $\ldots, f_m)$, можно сказать, что φ является K_n-системой в том и только в том случае, если $\operatorname{Spr}(\mu, H_\varphi) = \{\mu\}$ для любой положительной меры, сосредоточенной не более, чем в n точках.

Из теоремы 5.1 следует, что семейство φ является K_n-системой в том и только в том случае, если подпространство H_φ супремально порождает $C(Q)$ относительно множества $\widetilde{M}_n$, состоящего из всех положительных мер, сосредоточенных не более чем в n точках, или, что то же самое, относительно множества M_n, состоящего из мер $\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_{x_j} (\alpha_j \geqslant 0,\ x_j \in Q,\ j = 1, \ldots, n)$ таких, что $\|\mu\| = 1$.

Таким образом, семейство φ является K_n-системой в том и только в том случае, когда подпространство H_φ супремально порождает $C(Q)$ с порядком n. В частности, K_n-система φ порождает супремальный базис порядка n (семейство $f_1, \ldots, f_m, \ -\sum_{k=1}^{m} f_k$). Рассуждая так же, как и при $n=1$ (см. пункт 3⁰), можно показать, что семейство $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)$ является K_n-системой на компакте Q, то найдутся функции $g_2, \ldots, g_m$ такие, что семейство $\psi = (-1, g_2, \ldots, g_m)$ также будет являться K_n-системой.

Введем еще одно определение. Семейство функций $(f_1, \ldots, f_m)$ называется (m, n)-*разделяющим*, если следы функций $f_1, \ldots, f_m$ на любое $(m+n)$-элементное подмножество Q' компакта Q образуют супремальный базис порядка n в соответствующем $(m+n)$-мерном числовом пространстве R^{m+n} (т. е. в $C(Q')$).

Уместно отметить, что все введенные понятия являются топологическими инвариантами в очевидном смысле и, кроме того, наследственными в смысле, который понятен из следующего утверждения.

Если $(f_1, \ldots, f_m)$ — супремальный базис порядка n в пространстве $C(Q')$, то следы функций $f_1, \ldots, f_m$ на компактное подмножество Q' компакта Q образуют супремальный базис порядка не ниже n в пространстве $C(Q')$.

Теорема 6.1. *Функции $f_1, \ldots, f_m$ образуют супремальный базис порядка n в пространстве $C(Q)$ в том и только в том случае, если семейство $(f_1, \ldots, f_m)$ является (m, n)-разделяющим.*

Доказательство. Нуждается в проверке лишь достаточность сформулированного условия. Рассмотрим отображение $\psi: Q \longrightarrow R^m$, определенное соотношением $\psi: x \longrightarrow (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Нетрудно видеть, что отображение ψ является гомеоморфизмом Q и некоторого множества $A \subset R^m$. При этом, как видно из сделанных выше замечаний, следы на A координатах функций $e_1: x \longrightarrow x_1, \ldots, e_m: x \longrightarrow x_m$ образуют (m, n)-разделяющее семейство на A. Достаточно проверить, что эти функции образуют супремальный базис порядка n в $C(A)$. Воспользуемся теоремой 5.1 и покажем, что $\operatorname{Spr}(\nu, H) = \{\nu\}$ для любой вероятностной меры ν, определенной на A и сосредоточенной не более чем в n точках (здесь H — конус, натянутый на образующие $e_1, \ldots, e_m$). Не нарушая общности, можно считать, что $-\sum_{k=1}^{m} e_k = \mathbf{1}$.

Рассмотрим меру $\nu = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s \varepsilon_{z_s}$, где $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 1$; $z_1, \ldots, z_r \in A$; $r \leqslant n$, и неотрицательную меру $\mu \in C'(A)$ такую, что $\mu(e_i) \geqslant \nu(e_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Пусть вектор $y \in R^m$ представляет меру μ (по определению, см. [159], y обладает тем свойством, что $\mu(\mathbf{1}) e_i(y) = \mu(e_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$, заметим, что y входит в выпуклую оболочку $\operatorname{co}(A)$ компакта A). Переписав неравенства $\mu(e_i) \geqslant \nu(e_i)$ в виде $\mu(\mathbf{1}) e_i(y) \geqslant \sum_{s=1}^{r} \alpha_i e_i(z_s)$, получим, что y больше вектора $(\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_r z_r)/\mu(\mathbf{1})$.

По теореме Каратеодори (см., например, [49]) y является выпуклой комбинацией не более, чем m точек из A, т. е. найдутся элементы $y_s \in A$ и числа $\beta_s \geqslant 0$ $(s = 1, \ldots, k)$, $\sum_{s=1}^{k} \beta_s = 1$ такие, что $k \leqslant m$ и $y = \sum_{s=1}^{k} \beta_s y_s$. Отсюда следует, что

$$\mu(1)\sum_{s=1}^{k}\beta_s y_s \geqslant \sum_{s=1}^{r}\alpha_s z_s. \tag{6.1}$$

Предполагая, что в (6.1) имеет место строгое неравенство, получим противоречие с условием теоремы. В самом деле, по условию теоремы следы функций $e_1, \ldots, e_m$ на множество $\{y_1, \ldots, y_k;\ z_1, \ldots, z_r\}$ образуют супремальный базис порядка n в R^{k+r} (заметим, что $k+r \leqslant n+m$). В то же время, положительный росток (на этом базисе) функционала $(0, \ldots, 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ содержит функционал $\mu(1)\ (\beta_1, \ldots, \beta_k, 0, \ldots, 0)$. Итак,

$$\mu(1)\sum_{s=1}^{k}\beta_s y_s = \sum_{s=1}^{r}\alpha_s z_s. \tag{6.2}$$

Из (6.2) вытекает, что $\mu=\nu$. Прежде всего, покажем, что носитель вероятностной меры $\mu/\mu(1)$ лежит в выпуклой оболочке Z точек $z_1, \ldots, z_r$. В самом деле, в противном случае можно было бы найти аффинный функционал, положительный на Z и отрицательный на некоторых точках носителя μ, а это противоречит равенству (6.2) и тому обстоятельству, что вектор $y \in Z$ представляет μ. Отметим, что ни одна точка компакта A не лежит в $Z\diagdown\{z_i\}_{i=1}^{r}$. Это означает, что мера μ сосредоточена лишь на точках $z_1, \ldots, z_r$, т. е. $\mu = \gamma_1\varepsilon_{z_1} + \ldots + \gamma_r\varepsilon_{z_r}\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_r \geqslant 0)$. Следы функций $e_1, \ldots, e_m$ на множество $\{z_1, \ldots, z_r\}$ образуют супремальный генератор в R^r. Положительные линейные функционалы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ и $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ совпадают на этом генераторе и потому совпадают всюду. Таким образом, $\mu=\nu$, что и доказывает теорему.

Аналогично теореме 6.1 доказывается

Теорема 6.2. *Функции $f_1, \ldots, f_m$ являются супремальными образующими пространства $C(Q)$ в том и только в том случае, если их следы на любое $(m+1)$-точечное подмножество Q являются супремальными образующими пространства R^{m+1}.*

Рассмотрим различные точки $x_1, \ldots, x_{m+n}$ из Q и матрицу

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \ldots f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \ldots f_m(x_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1(x_{m+n}) & f_2(x_{m+n}) & \ldots f_m(x_{m+n}) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Из теоремы 6.1 мгновенно получаем, что функции $f_1, \ldots, f_m$ образуют супремальный базис порядка n в том и только в том случае, если никакая положительная комбинация длины $r \leqslant n$ строк матрицы (6.3) не мажорируется положительной линейной комбинацией остальных ее строк. (Этот результат можно рассматривать как аналог одной теоремы Ю. А. Шашкина [171], относящейся к K_n-системам.) Используя ту же технику, можно получить некоторые результаты, характеризующие компакт, имеющий супремальные образующие порядка n. Фактически, все сводится к описанию компактов в числовом пространстве, на которых следы координатных функций являются супремальными образующими. Описание этих компактов, как легко следует из доказательства теоремы 6.1, заключается в выяснении строения их выпуклой оболочки. Для обобщенных систем Коровкина описание соответствующих компактов было получено Ю. А. Шашкиным [171]. Ниже приводится его результат без доказательства.

Теорема Шашкина. *Система функций* $(-1, f_1, \ldots, f_m)$ *является* K_n-*системой в пространстве* $C(Q)$ *в том и только в том случае, если отображение* $\psi: x \longrightarrow (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ *инъективно и выпуклая оболочка любых* r *точек* $(1 \leqslant r \leqslant n)$ *множества* $\psi(Q)$ *является гранью выпуклой оболочки* $\operatorname{co}(\psi(Q))$ *этого множества.*

Используя теорему Шашкина, покажем, что верна следующая

Теорема 6.3. *Минимальная размерность обобщенной системы Коровкина в пространстве* $C(Q)$ *равна* $\operatorname{Sim}_n(Q)$.[1]

Доказательство. Достаточно проверить, что если в $C(Q)$ существует K_n-система $(-1, f_1, \ldots, f_m)$, то найдутся функции $\tilde{f}_0, \ldots, \tilde{f}_m$, составляющие супремальный базис порядка n. Рассмотрим отображение $\psi: x \longrightarrow (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ и через $\tilde{A}$ обозначим $\psi(Q)$.

Не уменьшая общности можно считать, что аффинная оболочка $\tilde{A}$ совпадает с R^m. Пусть $\tilde{u}$ — внутренняя точка множества $\operatorname{co}(\tilde{A})$, содержащаяся в $\operatorname{co}(\tilde{A})$ с шаровой окрестностью радиуса δ. Рассмотрим точку $\tilde{z} = -\delta\left(\sum_{i=0}^{m} e_i\right)\Big/(m+1)$ пространства R^{m+1} (здесь e_0,

[1] Эта теорема принадлежит Н. В. Рутковскому.

$e_1, \ldots, e_m$ — канонический базис в R^{m+1}) и обозначим гиперплоскость $L = \left\{y \in R^{m+1} : \sum_{i=0}^{m} y_i = -\delta\right\} = \left\{y \in R^{m+1} : \sum_{i=0}^{m} y_i = 0\right\} + \tilde{z}$. Отобразим линейно и изометрично R^m в подпространство $\left\{y \in R^{m+1} : \sum_{i=0}^{m} y_i = 0\right\}$ пространства R^{m+1}, а затем в L (сдвинув это подпространство на вектор $\tilde{z}$). Сделаем, в случае необходимости, аффинное преобразование L на себя так, чтобы образ вектора $\tilde{u}$ совпал с $\tilde{z}$. В результате множество $\tilde{A}$ перейдет в множество A, лежащее в L и содержащее $\tilde{z}$ вместе с окрестностью радиуса δ. Ясно, что A гомеоморфно компакту $\tilde{A}$, а следовательно, и компакту Q. Компакт $\tilde{A}$ удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме Шашкина. Поскольку все сделанные преобразования были аффинными, то и A удовлетворяет этим условиям. Последнее по теореме Шашкина означает, что функции $-\mathbf{1}$; $\varphi_0: z \to z_0$; $\ldots$; $\varphi_m: z \to z_m$ $(z = (z_0, \ldots, z_m))$ образуют K_n-систему в $C(A)$. Так как $-\delta\mathbf{1} = \sum_{i=0}^{m} \varphi_i$, то и функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ образуют K_n-систему.

Покажем, что $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — супремальный базис порядка n. Для этого рассмотрим меру $\nu = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ $\left(r \leqslant n;\ x_i \in A;\ \alpha_i > 0,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1\right)$ и покажем, что каждая неотрицательная мера μ, удовлетворяющая неравенствам $\mu(\varphi_j) \geqslant \nu(\varphi_j)$ $(j = 0, \ldots, m)$, совпадает с ν. С этой целью рассмотрим множество $\mathrm{co}(A)$ и его коническую оболочку K. Так как $|z + \delta e_j| = \delta\sqrt{1 - \frac{1}{m+1}} < \delta$, точки $-\delta e_j$ $(j = 0, \ldots, m)$ входят в δ-окрестность точки $\tilde{z}$, принадлежащую $\mathrm{co}(A)$. Поэтому конус K содержит в своей внутренности отрицательный ортант. Рассмотрим точку $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$. По теореме Шашкина v лежит в грани множества $\mathrm{co}(A)$ и, стало быть, в грани конуса K (ибо $\mathrm{co}(A)$ является основанием K). Если $l \in K^*$, то, поскольку $-e_j \in \mathrm{int}\, K$, имеем $l(e_j) < 0$ $(j = 0, \ldots, m)$, т. е. все координаты функционала l отрицательны. Отсюда вытекает, что $(v+R_+^{m+1})\cap K=\{v\}$. В самом деле, так как v лежит в грани конуса K, то найдется вектор $l\in K^*$, $l\neq 0$ такой, что $(l, v)=0$. Если бы $(v+R_+^{m+1})\cap K\neq\{v\}$, то функционал l имел хотя бы одну нулевую координату, что невозможно.

Вернемся к мере μ. Пусть точка y представляет μ. Тогда $y\in K$ и, кроме того, из рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 6.1, получаем, что $y\in v+R_+^{m+1}$. Из сказанного следует, что $y=v$, и потому $\mu(\varphi_i)=$ $=\varphi_i(y)=\varphi_i(v)=\nu(\varphi_i)$ $(i=0, \ldots, m)$. Так как функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ образуют K_n-систему, то $\mu=\nu$. Это и доказывает теорему.

Конструкция доказательства этой теоремы может быть использована и при изучении других вопросов. Вычислим, в частности, супремальный ранг $\mathrm{Sim}(Q)=$ $=\mathrm{Sim}_1(Q)$ компакта Q. Как следует из предложения 3.4 и замечания к нему, в случае, если компакт Q не гомеоморфен сфере, наименьшее число функций, составляющих супремальный базис $(\mathrm{Sim}(Q))$, совпадает с $\mathrm{sim}(Q)+1$. Предположим, что Q является $(m-1)$-мерной сферой. Так как Q топологически вкладывается в R^m, то в $C(Q)$ существует супремальный базис $(-1, f_0, \ldots, f_m)$. Погружая Q в гиперплоскость L так, как это было сделано в доказательстве теоремы, и учитывая, что каждая точка сферы является крайней точкой шара, получим, что следы координатных функций на Q (мы считаем, что Q реализовано в L) образуют базис в $C(Q)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 6.4. *Компакт Q гомеоморфен некоторой конечномерной сфере в том и только в том случае, если* $\mathrm{sim}(Q)=\mathrm{Sim}(Q)$. *Если Q не гомеоморфен сфере, то* $\mathrm{Sim}(Q)=\mathrm{sim}(Q)+1$.

7°. Сходимость последовательностей операторов в KB-пространствах измеримых функций. Рассмотрим некоторое KB-пространство. Предложение 1.1 дает условие (o)-сходимости последовательности положительных операторов на векторных подпространствах этого пространства. В рассматриваемой ситуации наряду с (o)-сходимостью представляет интерес и $(*)$-сходимость этой последовательности, ибо в KB-пространстве $(*)$-сходимость совпадает со сходимостью по норме.

Имеет место

Предложение 7.1. *Пусть X — векторное подпространство K-пространства Y и H — супремальный генератор X в смысле Y, являющийся конической оболочкой не более, чем счетного числа образующих $h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots$. Пусть, далее, оператор $T:X\to Z$, где Z — некоторое K-пространство, перестановочен с операцией* sup *на H и последовательность положительных операторов $T_n:X\to Z$ такова, что при всех k существует $(*)-\lim\limits_n T_n h_k = b_k$, причем $b_k \geqslant Th_k$. Тогда $T_n x \xrightarrow{(*)} Tx$ при всех $x\in X$.*

Доказательство. Пусть $x\in X$ и $(T_{n_i}x)$ — подпоследовательность последовательности $(T_n x)$. Рассмотрим при всех k подпоследовательности $(T_{n_i}h_k)$ и, используя диагональный процесс, найдем такую подпоследовательность $(T_{n_{i_j}})$, что последовательности $(T_{n_{i_j}}h_k)$ (o)-сходятся к b_k $(k=1, 2, \ldots)$.

Пусть $h\in U_x=\{h'\in H: h'\leqslant x\}$. Тогда $h=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k h_k$, где коэффициенты α_k неотрицательны и лишь конечное число их отлично от нуля. Имеем

$$Th = T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k h_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k Th_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k b_k = \\ =(o)-\lim_j T_{n_{i_j}}h \leqslant \underline{\lim_j}\, T_{n_{i_j}}x,$$

откуда следует, что $Tx\leqslant \underline{\lim\limits_j}\, T_{n_{i_j}}x$. Таким же образом проверяется, что $T(-x)\leqslant \underline{\lim\limits_j}\, T_{n_{i_j}}(-x)$, и потому $Tx=(o)-\lim\limits_j T_{n_{i_j}}x$. Итак, из последовательности $(T_{n_i}x)$ выделена подпоследовательность, (o)-сходящаяся к Tx. Это означает, что $Tx=(*)-\lim\limits_n T_n x$. Предложение доказано.

Пусть Q — компакт, на котором определена (борелевская регулярная) положительная мера μ. Будем предполагать, что носитель этой меры совпадает с Q. Через $S(Q)$ обозначим K-пространство всех измеримых (μ-

измеримых) функций[1], определенных на Q. Заметим, что в наших предположениях пространство $C(Q)$ является (с точностью до изоморфизма) векторным упорядоченным подпространством $S(Q)$. Пусть H — конус в $C(Q)$, граница Шоке $\mathrm{Ch}(H)$ которого содержит измеримое подмножество Q_H полной меры (т. е. $\mu(Q_H)=\mu(Q)$).

Для любой $f\in C(Q)$ выполняется соотношение

$$f(x)=\sup_{h\in H, h\leqslant f} h(x) \quad (x\in Q_H),$$

которое означает, что $f=\sup U_f$ (где sup вычисляется в $S(Q)$). Действительно, пусть $g=\sup U_f$. Тогда $g\leqslant f$. Предположим, что найдется представитель $\tilde{g}$ класса g такой, что $\tilde{g}(x)<f(x)$ на множестве $\tilde{Q}$ положительной меры. Для $x\in\tilde{Q}\cap Q_H$ имеем $\tilde{g}(x)<f(x)=\sup\{h(x):h\in U_f\}$, что невозможно, так как $\mu(\tilde{Q}\cap Q_H)>0$. Из сказанного вытекает

Предложение 7.2. *Если H конус в $C(Q)$, граница Шоке которого содержит измеримое подмножество полной меры, то H супремально порождает $C(Q)$ в смысле $S(Q)$.*

Замечание. Можно показать, что если конус Шоке H супремально порождает $C(Q)$ в смысле $S(Q)$, то любое измеримое подмножество дополнения границы Шоке μ-пренебрежимо.

Покажем, что справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть H — сепарабельный конус в $C(Q)$, граница Шоке которого содержит измеримое подмножество полной меры; Z есть K-пространство, нормально вложенное в $S(Q)$ и содержащее $C(Q)$; оператор $T\in\mathscr{L}^+(C(Q), Z)$ перестановочен на H с операцией* sup; *последовательность (T_n) операторов из $\mathscr{L}^+(C(Q), Z)$ такова, что при всех $h\in H$ существует $(*)-\lim\limits_n T_nh=b_h$, причем $b_h\geqslant Th$. Тогда $T_nf\xrightarrow{(*)}Tf$ при всех $f\in C(Q)$.*

Доказательство. Из предложения 7.2 вытекает, что H супремально порождает $C(Q)$ в смысле Z. Следовательно, H содержит сильно отрицательный элемент f_H. Пусть $\{h_1, \ldots, h_k, \ldots\}$ счетное всюду плотное

---

[1] Точнее говоря, элементами $S(Q)$ являются классы, состоящие из μ-эквивалентных измеримых функций.

подмножество H и H' — коническая оболочка множества $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$. Не уменьшая общности, будем считать, что $f_H \in H'$ и потому H' — минорирующий конус. Покажем, что H' — супремальный генератор $C(Q)$ (в смысле Z). Пусть E' — оператор из $\mathscr{L}^+(C(Q), Z)$, мажорирующий на конусе H' оператор вложения. Оператор E' положителен и потому (r)-непрерывен. Так как в $C(Q)$ сходимость по норме совпадает с (r)-сходимостью и конус H' плотен в H, то $E'h \geqslant h$ для всех $h \in H$. Поскольку H супремально порождает $C(Q)$ в смысле Z, то E' является вложением $C(Q)$ в Z. Отсюда по теореме 1.1 H' супремально порождает $C(Q)$ в смысле Z. Для завершения доказательства необходимо сослаться на предложение 7.1.

Замечание 1. В K-пространстве $S(Q)$ $(*)$-сходимость совпадает со сходимостью по мере. Если Z является KB-пространством, то $(*)$-сходимость в Z совпадает со сходимостью по норме.

Замечание 2. Сепарабельность конуса H можно гарантировать, например, в случае, если сепарабельно $C(Q)$, т. е. если компакт Q метризуем.

Теорема 7.2. *Пусть Z_1 и Z_2 — банаховы пространства, содержащиеся в $S(Q)$ и содержащие $C(Q)$, причем $C(Q)$ плотно в Z_1 и Z_2 является KB-пространством, нормально вложенным в $S(Q)$. Пусть, далее, H — конус в $C(Q)$, граница Шоке которого содержит измеримое подмножество полной меры; оператор $T \in \mathscr{L}^+(Z_1, Z_2)$ перестановочен на H с операцией* sup; *последовательность (T_n) операторов из $\mathscr{L}^+(Z_1, Z_2)$ такова, что $\sup\limits_n \|T_n\| < +\infty$ и при всех $h \in H$ существует $\lim\limits_n T_n h = b_h$, причем $b_h \geqslant Th$ (здесь $\lim\limits_n$ означает предел по норме Z_2). Тогда $\|T_n f - Tf\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$ при всех $f \in Z_1$.*

Для доказательства надо применить теорему 7.1 к сужениям T' и T_n' операторов T и T_n на $C(Q)$, а затем воспользоваться теоремой Банаха — Штейнхауза.

Заметим, что (o)-сходимость в $S(Q)$ совпадает со сходимостью почти всюду. Поэтому из предложения 1.1 вытекает следующее

Предложение 7.3. *Пусть конус H и оператор $T \in \mathscr{L}^+(C(Q), S(Q))$ таковы же, как и в теореме 7.1. Пусть, далее, последовательность (T_n) операторов из $\mathscr{L}^+(C(Q), S(Q))$ такова, что $\lim\limits_n T_n h \geqslant Th$ при всех $h \in H$*

(здесь нижний предел понимается в смысле сходимости почти всюду). Тогда при всех $f \in C(Q)$ последовательность $(T_n f)$ стремится к Tf почти всюду.

В следующих двух пунктах будет показано применение полученных результатов для исследования неположительных функционалов и операторов.

8°. Порядковая надстройка и слабая сходимость функционалов. Пусть V — локально выпуклое пространство; U — выпуклое множество в пространстве V', содержащее нуль и замкнутое в топологии $\sigma(V', V)$. Символом p обозначим опорную функцию множества U, а $\hat{p}$ — калибровочную функцию Минковского этого множества

$$p(x) = \sup_{\mu \in U} \mu(x) \quad (x \in V);$$

$$\hat{p}(\mu) = \inf \{\lambda > 0 : \mu \in \lambda U\}.$$

Напомним, что U совпадает с множеством U_p всех опорных к функционалу p; $p(x) \geqslant 0$ $(x \in V)$ (так как $0 \in U$); $\operatorname{dom} \hat{p} = \operatorname{Co}(U)$; $\hat{p}(\mu) \leqslant 1$ в том и только в том случае, если $\mu \in U$. Функционалы p и $\hat{p}$ связаны между собой следующим образом:

$$\hat{p}(\mu) = \sup_{p(x) \leqslant 1} \mu(x) \quad (\mu \in V'). \tag{8.1}$$

Из определения поляры следует, что

$$\{x \in V : p(x) \leqslant 1\} = U_p^0 = U^0,$$

и потому, используя двойственность калибровочных и опорных функций (предложение 1.6.1), для $\nu \in V'$ имеем

$$\sup_{p(x) \leqslant 1} \nu(x) = \sup_{x \in U^0} \nu(x) =$$

$$= \delta^*_{U^0}(\nu) = \mu_{U^{00}}(\nu) = \mu_U(\nu) = \hat{p}(\nu),$$

что и требовалось (здесь δ_U и μ_U — индикаторная и калибровочная функции множества U).

Из (8.1) вытекает, что

$$\mu(x) \leqslant p(x)\hat{p}(\mu) \quad (x \in \operatorname{dom} p;\ \mu \in \operatorname{dom} \hat{p}).$$

Рассмотрим пространство $V \times R$ и введем в него отношение предпорядка с помощью конуса K — надграфика функционала p:

$$K = \{(x, t) \in V \times R : t \geqslant p(x)\}.$$

Покажем, что

$$K^*=\{(\mu, s)\in V'\times R : s\geqslant \widehat{p}(-\mu)\}.$$

Пусть $(\mu, s)\in K^*$. Тогда, если $p(x)\leqslant 1$, то $\mu(x)+ +s\geqslant 0$, откуда следует, что

$$s\geqslant \sup_{p(x)\leqslant 1}(-\mu)(x)=\widehat{p}(-\mu).$$

Если $s\geqslant\widehat{p}(-\mu)$, то $-\mu\in\operatorname{dom}\widehat{p}$ и потому для $x\in\operatorname{dom}p$ имеем $-\mu(x)\leqslant p(x)\,\widehat{p}(-\mu)$. Если $t\geqslant p(x)$, то

$$\mu(x)\geqslant -p(x)\widehat{p}(-\mu)\geqslant -st,$$

т. е. $(\mu, s)(x, t)=\mu(x)+st\geqslant 0$.

Пусть H конус в V, положим $\tilde{H}=H\times(-R_+)$. Имеет место

Теорема 8.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\tilde{H}$ *— обобщенный супремальный генератор пространства* $V\times R$ *относительно функционала* $(\mu_0, \widehat{p}(-\mu_0))$, *где* $-\mu_0\in\operatorname{Co}(U)$;

(2) *Если последовательность* (μ_n) *функционалов из* V' *равностепенно непрерывна и удовлетворяет условиям*

$$\varliminf_n \mu_n(h)\geqslant\mu_0(h)\ (h\in H);$$

$$\varlimsup_n \widehat{p}(-\mu_n)\leqslant\widehat{p}(-\mu_0),$$

то (μ_n) *слабо сходится к* μ_0;

(3) *Если функционал* $\mu\in V'$ *таков, что* $\widehat{p}(-\mu)\leqslant \leqslant\widehat{p}(-\mu_0)$ *и, кроме того,* $\mu(h)\geqslant\mu_0(h)$ $(h\in H)$, *то* $\mu\underset{\sim}{=}\mu_0$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Функционалы $\tilde{\mu}_n= =(\mu_n, p(-\mu_n))$, $n=0, 1, \ldots$ положительны в пространстве $\tilde{V}=V\times R$; кроме того, последовательность $(\tilde{\mu}_n)$ равностепенно непрерывна. Пусть $(h, -t)\in\tilde{H}$. Тогда

$$\varliminf_n\tilde{\mu}_n(h, -t)=\varliminf_n\left(\tilde{\mu}_n(h, 0)-t\tilde{\mu}_n(0,1)\right)\geqslant\varliminf_n\tilde{\mu}_n(h, 0)+$$

$$+t\varliminf_n\left(-\tilde{\mu}_n(0,1)\right)=\varliminf_n\mu_n(h)+t\varliminf_n\left(-\widehat{p}(-\mu_n)\right)\geqslant$$

$$\geqslant\mu_0(h)-t\varlimsup_n\widehat{p}(-\mu_n)\geqslant\mu_0(h)-t\widehat{p}(-\mu_0)=\tilde{\mu}_0(h, -t).$$

Используя условия (1) и теорему 5.2, получим для любых $(x, t) \in \tilde{V}$, что

$$\lim_n \tilde{\mu}_n (x, t) = \tilde{\mu}_0 (x, t).$$

В частности, на элементах вида $(x, 0)$ имеем

$$\lim_n \tilde{\mu}_n (x, 0) = \lim_n \mu_n (x) = \tilde{\mu}_0 (x, 0) = \mu_0 (x).$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). На основе теоремы 5.2 достаточно проверить, что положительный росток $\operatorname{Spr}(\tilde{\mu}_0, \tilde{H})$ функционала $\tilde{\mu}_0$ на конусе $\tilde{H}$ совпадает с $\{\tilde{\mu}_0\}$. Итак, пусть $(\nu, s) \in K^*$, т. е. $s \geqslant \hat{p}(-\nu)$ и, кроме того, $(\nu, s)(0, -1) \geqslant \geqslant (\mu_0, \hat{p}(-\mu_0))(0, -1)$ и $(\nu, s)(h, 0) \geqslant (\mu_0, \hat{p}(-\mu_0))(h, 0)$ $(h \in H)$. Перепишем последние неравенства в виде $\nu(h) \geqslant \mu_0(h)$ $(h \in H)$ и $\hat{p}(-\mu_0) \geqslant s$. Учитывая, что $s \geqslant \hat{p}(-\nu)$, получим $\nu = \mu_0$; кроме того, из соотношения $p(-\mu_0) \geqslant s \geqslant \hat{p}(-\nu) = \hat{p}(-\mu_0)$ следует, что $s = \hat{p}(-\mu_0)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Фактически установлено несколько большее. Именно, условие (2) можно заменить эквивалентным условием (2'): имеет место (2) и, кроме того, $\lim_n \hat{p}(-\mu_n) = \hat{p}(-\mu_0)$. Для доказательства достаточно при проверке (1) $\Rightarrow$ (2) заметить, что последовательность $(\tilde{\mu}_n)$ сходится к $\tilde{\mu}_0$, в частности, на элементе $(0, 1)$.

Замечание 2. Если конус $\operatorname{dom} p$ телесен и функционал p ограничен хотя бы на одной окрестности в $\operatorname{int}(\operatorname{dom} p)$, то конус $K = \operatorname{epi} p$ телесен. В этом случае в условии (1) вместо обобщенного генерирования можно говорить просто о генерировании, а в условии (2) предположение о равностепенной непрерывности излишне.

Предположим, что U — конус. Тогда найдется такой конус K_0 в пространстве V, что $U^0 = -K_0^*$. В этом случае

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \in K_0 \\ +\infty & x \overline{\in} K_0 \end{cases}; \quad \hat{p}(\mu) = \begin{cases} 0 & \mu \in U \\ +\infty & \mu \overline{\in} U \end{cases}.$$

Предположим, что пространство V (пред)упорядочено конусом K_0, тогда условия (1), (2), (3) теоремы 8.1 совпадают с соответствующими условиями теоремы 5.2.

Предположим, что U отлично от конуса. Тогда, как нетрудно проверить, множество $\partial^+U=\{\mu\in U:\widehat{p}(-\mu)=1\}$ непусто. Приведем геометрическую интерпретацию условий (2) и (3) в рассматриваемом случае.

Рассмотрим вначале условие (2), предполагая, что вместо неравенства $\overline{\lim\limits_n}\, \widehat{p}(-\mu_n)\leqslant\widehat{p}(-\mu_0)$ выполняются неравенства $\widehat{p}(-\mu_n)\leqslant\widehat{p}(-\mu_0)$ $(n=1, 2,\ldots)$ и, кроме того, $\widehat{p}(-\mu_0)=1$. При этих предположениях условие (2) означает следующее. Если функционал $\nu_0=-\mu_0$ лежит на границе ∂^+U множества U, а равностепенно непрерывная последовательность $(\nu_n)=(-\mu_n)$ функционалов из этого множества такова, что $\overline{\lim\limits_n}\,\nu_n(h)\leqslant\nu_0(h)$ $(h\in H)$, то (ν_n) слабо сходится к ν_0.

Условие (3) означает, что функционал $\nu=-\mu$ из множества U, мажорируемый на H функционалом ν_0 из ∂^+U, совпадает с ν_0.

Обратимся к вопросу о существовании обобщенных генераторов, рассматриваемых в приведенной теореме.

Пусть H — конус в V и функционал ν_0 из V' таков, что $\widehat{p}(\nu_0)=1$. Рассмотрим множество ν_0-H^* всех функционалов, мажорируемых на H функционалом ν_0. По условию (3) конус $\tilde{H}$ является супремальным генератором относительно функционала $(\mu_0, \widehat{p}(-\mu_0))$, где $\mu_0=-\nu_0$, в том и только в том случае, если

$$(\nu_0-H^*)\cap U=\{\nu_0\}. \tag{8.2}$$

Пусть элемент ν_0 множества U таков, что при некотором $h\in V$ выполняется неравенство

$$\nu_0(h)>\nu(h)\quad (\nu\in U). \tag{8.3}$$

Положим $H=(\alpha h)_{\alpha\leqslant 0}$. Тогда $\nu_0-H^*=\{\nu\in V':\nu(h)\geqslant\geqslant\nu_0(h)\}$. Из сказанного следует, что при данном H условия (8.2) и (8.3) эквивалентны.

Перепишем условие (8.3) в терминах функционала p (напомним, что $p:x\longrightarrow\sup\{\nu(x):\nu\in U\}$). Это условие означает, что ν_0 является опорным линейным функционалом к функционалу p в точке h и других опорных в этой точке функционал p не имеет. Таким образом, если элемент $h\in V$ таков, что функционал p имеет единственный опорный ν_0 в точке h, то для луча $H=(-\alpha h)_{\alpha\geqslant 0}$

выполняется каждое из эквивалентных условий теоремы 8.1 (относительно функционала $\mu_0=-\nu_0$).

Интересен случай, когда V — нормированное пространство, U — единичный шар пространства V'. При этом p совпадает с нормой в V, а $\hat{p}$ с нормой в V'.

Пространство $V\times R$, упорядоченное конусом $K=\operatorname{epi}(\|\cdot\|)$, будет называться *порядковой надстройкой* пространства V. (Заметим, что конус K телесен).

Напомним, что единичный шар S банахова пространства V называется *строго выпуклым* (округлым), если $\|x+y\|<2$ для любых $x, y\in S$, $x\neq y$; шар называется *гладким*, если для каждого нормированного элемента x существует единственный нормированный функционал μ_x такой, что $\mu_x(x)=1$. Если пространство V рефлексивно, то понятия строгой выпуклости и гладкости двойственны: шар S является строго выпуклым (соответственно, гладким) в том и только в том случае, если единичный шар S^0 пространства V' гладок (соответственно, является строго выпуклым). Из указанной двойственности вытекает следующее свойство строго выпуклого шара в рефлексивном пространстве (см. [62]): для каждого функционала $\mu\in V'$, $\mu\neq 0$ найдется одна точка $x_\mu\in S$ такая, что $\mu(x_\mu)=\|\mu\|$ (для всех $y\in S$, $y\neq x_\mu$ выполняется, очевидно, неравенство $\mu(y)<\|\mu\|$).

Пусть V — рефлексивное банахово пространство со строго выпуклым шаром S. Функционал $p:\mu\longrightarrow\|\mu\|$ $(\mu\in V')$ имеет единственный опорный x_{μ_0} в каждой точке $\mu_0\neq 0$. Рассматривая V как пространство, сопряженное к V', получим, что $(\alpha\mu_0)_{\alpha\leqslant 0}\times(-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V' относительно функционала $(-x_{\mu_0}, \|x_{\mu_0}\|)$. Из теоремы 8.1 и замечания 1 к ней вытекает следующее утверждение: пусть $\mu_0\in V'$ и последовательность (x_n) элементов пространства V такова, что $\overline{\lim\limits_n}\|x_n\|\leqslant\|x_{\mu_0}\|$, $\underline{\lim\limits_n}\,\mu_0(x_n)\geqslant\mu_0(x_{\mu_0})$, тогда (x_n) слабо сходится к x_{μ_0} и $\|x_n\|\to\|x_{\mu_0}\|$.

Шар S называется *равномерно выпуклым*, если для каждого $\varepsilon\in(0,2]$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\|x+y\|<2(1-\delta(\varepsilon))$ для любых x, $y\in S$, удовлетворяющих неравенству $\|x-y\|>\varepsilon$.

Известно, что равномерное выпуклое пространство (т. е. пространство с равномерно выпуклым шаром) рефлексивно и, кроме того, обладает следующим свойством: если последовательность (x_n) элементов этого пространства слабо сходится к x и, кроме того, $\|x_n\| \to \|x\|$, то $\|x_n - x\| \to 0$ (см. [62]). Отсюда следует

Теорема 8.2. *Последовательность (x_n) элементов равномерно выпуклого пространства V сходится по норме к x_0, $x_0 \neq 0$ в том и только в том случае, если $\underline{\lim}_n \mu_0(x_n) \geqslant \mu_0(x_0)$ и $\overline{\lim}_n \|x_n\| \leqslant \|x_0\|$, где μ_0 такой (однозначно определенный) элемент пространства V', что $\|\mu_0\| = 1 = \mu_0(x_0)/\|x_0\|$.*

К этому же кругу вопросов (объединяемых, обычно, под названием «геометрия банаховых пространств») примыкает задача о единственности распространения функционалов.

Фелпс в [158] ввел понятие о подпространствах, обладающих свойством U. *Подпространство H* банахова пространства *V обладает свойством U*, если любой линейный непрерывный функционал, определенный на H, обладает единственным распространением с сохранением нормы на пространство V. Из теоремы 8.1 следует, что всякое подпространство H, обладающее свойством U, таково, что $\bar{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно некоторого функционала $(\mu, \|\mu\|)$ из $V' \times R$. Уместно заметить, что слово «некоторого» заменить на слово «любого» нельзя, так как не каждый функционал из V' является требуемым распространением. Поясним это элементарным примером.

Рассмотрим пространство $V = R^2$ с евклидовой нормой и пусть функционалы ν_1, ν_2 таковы, что $\nu_1 = (e_1 + e_2)/|e_1 + e_2|$; $\nu_2 = (-e_1 + e_2)/|e_1 + e_2|$, а в качестве H возьмем прямую, проходящую через точку $x_0 = e_2$. Очевидно, что $\bar{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки относительно функционала $(e_2, 1) \in V' \times R = R^3$, однако $|\nu_1| = |\nu_2| = 1$ и, кроме того, $\nu_1(x_0) = \nu_2(x_0)$.

Результаты Фелпса и теорема 8.1 позволяют дать различные характеристики геометрических свойств шара в банаховом пространстве на языке слабой сходимости. Приведем один результат такого рода.

Теорема 8.3. *Пусть V — рефлексивное банахово пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *единичный шар пространства V гладок;*

(2) *для каждого подпространства* H, *любого функционала* $\mu_0 \in H'$ *и последовательности функционалов* $(\mu_n) \subset V'$ *такой, что*

$$\overline{\lim_n} \|\mu_n\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1, x \in H} |\mu_0(h)| = \|\mu_0\|_H,$$

$$\lim_n \mu_n(h) = \mu_0(h) \quad (h \in H),$$

последовательность (μ_n) *слабо сходится*;

(3) *свойство* (2) *имеет место для одномерных подпространств.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). По теореме Тейлора—Фогеля [158] любое подпространство $H \subset V$ обладает свойством U, т. е. существует единственный функционал $\tilde{\mu}_0 \in V'$ такой, что $\|\tilde{\mu}_0\| = \|\mu_0\|_H$ и $\tilde{\mu}_0(h) = \mu_0(h)$ для всех $h \in H$. По теореме 8.1 это означает, что $\hat{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(\tilde{\mu}_0, \|\tilde{\mu}_0\|)$ и, следовательно, последовательность (μ_n) слабо сходится к μ_0.

(2) $\Rightarrow$ (3). Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Если единичный шар не гладок, то для некоторого x_0 такого, что $\|x_0\| = 1$, найдутся функционалы μ, $\nu \in V'$ такие, что $\|\mu\| = \|\nu\| = 1$; $\mu(x_0) = \nu(x_0) = 1$ и, кроме того, для некоторого $x_1 \in V$ оказывается, что $\mu(x_1) \neq \nu(x_1)$. Пусть $H = \{\alpha x_0\}_{\alpha \in R}$ и $\mu_0 \in H'$ определен соотношением $\mu_0(\alpha x_0) = \alpha$. Рассмотрим последовательность (μ_n), определенную соотношениями $\mu_{2n} = \mu$, $\mu_{2n+1} = \nu$. Очевидно, что $\lim\limits_n \|\mu_n\| = 1$ и $\lim\limits_n \mu_n(x_0) = \mu_0(x_0)$. С другой стороны, последовательность $(\mu_n(x_1))$ не сходится. Получается противоречие.

При изучении сходимости функционалов (и операторов) важную роль играют H-выпуклые элементы. В связи с этим представляет интерес выяснить, каковы должны быть локальные характеристики конуса H в банаховом пространстве V, чтобы конус $\hat{H}$ являлся супремальным генератором порядковой надстройки V относительно некоторого функционала $(\mu, \|\mu\|)$, где $\mu \in V'$.

Предложение 8.1. *Конус* $\hat{H}$ *является супремальным генератором порядковой надстройки пространства* V *относительно функционала* $(\mu, \|\mu\|)$ *в том и только в* *том случае, если для всяких* $x \in V$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется элемент* $h \in H$ *такой, что*

$$\mu(x) - \mu(h) < \varepsilon - \|\mu\| \|x - h\|. \qquad (8.4)$$

Доказательство. При доказательстве (1)⇒(2) в теореме 8.1 было использовано только соотношение

$$(\mu, \|\mu\|)(x, 0) = \sup_{\substack{(h, t) \leqslant (x, 0) \\ h \in H, t \leqslant 0}} (\mu, \|\mu\|)(h, t)$$

или, иными словами,

$$\mu(x) = \sup \{\mu(h) - t\|\mu\| : \|x - h\| \leqslant t,\ h \in H,\ t \geqslant 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{h \in H} (\mu(h) - \|\mu\| \|x - h\|).$$

С другой стороны, $\mu(x) - \mu(h) \geqslant -|\mu(x-h)| \geqslant -\|\mu\| \times \times \|x - h\|$, т. е.

$$\mu(x) = \sup_{h \in H} (\mu(h) - \|\mu\| \|x - h\|).$$

Предложение доказано.

Замечание 1. Полученный результат тесно связан с теоремой Хана — Банаха. В самом деле, предположим, что H — подпространство V и f_0 — некоторый функционал из V'. Было показано, что $\bar{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(f_0, \|f_0\|)$ в том и только в том случае, если для каждого $x \in V$ выполняется равенство

$$f_0(x) = \sup_{h \in H} (f_0(h) - \|f_0\| \|x - h\|).$$

В частности, рассмотрев последнее выражение для элемента $-x$, получим, что

$$\sup_{h \in H} (f_0(h) - \|f_0\| \|x - h\|) = \inf_{h \in H} (-f_0(h) + \|f_0\| \|x + h\|). \qquad (8.5)$$

В последнем выражении фигурируют значения функционала f_0 только на подпространстве H. Таким образом, функционал f_0, определенный на H, допускает единственное распространение с сохранением нормы на пространство V в том и только в том случае, если для любого $x \in V$ выполняется соотношение (8.5); при этом значение такого распространения на элементе x в точности равно общему значению выражений, фигурирующих в левой и правой частях (8.5). Впрочем, последний факт, естественно, нетрудно непосредственно извлечь из общепринятого доказательства теоремы Хана — Банаха.

Замечание 2. Пусть f — некоторый нормированный функционал над V и $W=\{x\in V: f(x)=\|x\|\}$. Отметим, что W является конусом. Рассмотрим следующий сублинейный функционал $\varphi_W: V\to R$, детально изученный Майерсом [120],

$$\varphi_W: x \to \inf_{h\in W}(\|x+h\|-\|h\|).$$

Минимальной гранью F_W, порожденной f, называют множество

$$\{g\in V': \|g\|=1,\ g(h)=f(h)\quad (h\in W)\}.$$

Из теоремы 8.1 следует результат, полученный Майерсом. Именно, функционал φ_W линеен в том и только в том случае, если минимальная грань F_W состоит из одной точки. Для установления этого свойства достаточно сопоставить функционал φ_W с функционалом, фигурирующим в правой части (8.5). (Попутно заметим, что функционал $f_0: x\to\|x\|$, определенный на W, линеен; поэтому приведенное условие (сравните с теоремой 8.3) означает, что f_0 допускает единственное линейное распространение с сохранением нормы на V).

Функционал φ_W впоследствии был использован Джерисоном в [57] для получения абстрактной характеристики некоторых пространств непрерывных функций.

Замечание 3. Предложение 8.1 естественным образом обобщается на тот случай, когда рассматривается сублинейный функционал в локально выпуклом пространстве.

Выясним смысл условия (8.4) в пространстве непрерывных функций $C(Q)$. Пусть для удобства μ есть вероятностная мера на Q, т. е. $\mu\geqslant 0$ и $\|\mu\|=\mu(\mathbf{1})=1$. Положим $\alpha=\|x-h\|$, тогда (8.4) перепишется в виде

$$-\alpha\mathbf{1}+h\leqslant x\leqslant \alpha\mathbf{1}+h;$$

$$\mu(x)<\mu(h-\alpha\mathbf{1})+\varepsilon.$$

Иными словами, $\bar{H}$ — это супремальный генератор порядковой надстройки пространства $C(Q)$ относительно функционала $(\mu, \mathbf{1})$ в том и только в том случае, если для каждого $x \in C(Q)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $h \in H$ и $\alpha \geqslant 0$ такие, что

$$-\alpha\mathbf{1} + h \leqslant x; \quad -\alpha\mathbf{1} - h \leqslant -x; \quad \mu(x) < \mu(h - \alpha\mathbf{1}) + \varepsilon.$$

Если рассмотреть пространство пар $C(Q) \times C(Q)$ и в нем конус $\tilde{H}$, натянутый на элемент $(-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ и конус $\{(h, -h) : h \in H\}$, то, наделив $C(Q) \times C(Q)$ естественными структурами полуупорядоченного и банахова пространства и обозначив через $\tilde{\mu}$ функционал $(x, y) \to \mu(x)$ $(x, y \in C(Q))$, получим из (8.6)

Предложение 8.2. *Конус $\tilde{H}$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства $C(Q)$ относительно функционала* $(\mu, 1)$ *в том и только в том случае, если для любой функции $x \in C(Q)$ выполняется соотношение*

$$\tilde{\mu}(x, -x) = \sup_{\substack{(h, h') \in \tilde{H} \\ (h, h') \leqslant (x, -x)}} \tilde{\mu}(h, h').$$

Замечание. Ниже будет показано, что в условиях предложения 8.2 конус $\tilde{H}$ является фактически супремальным генератором пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно функционала $\tilde{\mu}$.

Получившееся соотношение приводит к задаче изучения таких конусов H, что конусы $\tilde{H}$ являются супремальными генераторами пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно пространства $Z \times Z$, где Z — некоторое K-пространство, содержащее $C(Q)$.

9°. Сходимость операторов с абстрактной нормой. Естественным обобщением линейного ограниченного функционала (или, что то же самое, оператора из нормированного пространства V в K-пространство R) является линейный оператор T из V в K-пространство Y, *обладающий абстрактной нормой.* Последнее означает, что множество $\{Tx : \|x\| \leqslant 1\}$ ограничено и, стало быть, существует элемент

$$|T| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |Tx|.$$

Элемент $|T|$ называется *абстрактной нормой* оператора T.

Следующее простое предложение позволяет перенести на операторы с абстрактной нормой результаты предыдущего пункта.

Предложение 9.1. *Оператор $T:V\to Y$ обладает абстрактной нормой, не превосходящей элемента $a\in Y$, $a\geqslant 0$, в том и только в том случае, если оператор (T,a), действующий из порядковой надстройки пространства V в Y по формуле*

$$(T,\ a):(x,\ t)\to Tx+ta,$$

является положительным.

Доказательство. В самом деле, если $|T|\leqslant a$, то

$$Tx\geqslant -|Tx|\geqslant -|T|\|x\|\geqslant -a\|x\|.$$

Так что, если $\|x\|\leqslant t$, то $Tx\geqslant -ta$. Это и означает, что $(T,\ a)\in\mathscr{L}^{+}(V\times R,\ Y)$. Если, наоборот, $(T,\ a)\geqslant 0$, то $Tx\geqslant -ta$ для всех x таких, что $\|x\|\leqslant t$, т. е. $Tx\leqslant a$, как только $\|x\|\leqslant 1$. Отсюда и вытекает, что $|T|=\sup\{|Tx|:\|x\|\leqslant 1\}\leqslant a$. Предложение доказано.

В рассматриваемой ситуации естественно ввести следующее определение. Минорирующий конус H в векторном полуупорядоченном пространстве X будем называть *супремальным генератором* пространства X *относительно* положительного *оператора* $T:X\to Y$ (где Y — некоторое K-пространство), если

$$Tx=\sup_{h\leqslant x,h\in H}Th\quad (x\in X).$$

Если $X\subset Y$ и $T=E$ — оператор вложения X в Y, то данное определение совпадает со стандартным определением супремального генератора; если $Y=R$, то это определение перейдет в определение генератора относительно функционала.

Замечание. Если H — супремальный генератор X относительно оператора $T:X\to Y$, то конус $T(H)$ является супремальным генератором пространства $T(X)$ в смысле K-пространства Y. В самом деле, для элемента $Tx\in T(X)$ (где $x\in X$) имеем

$$\sup_{h\in H,\,Th\leqslant Tx}Th\geqslant\sup_{h\in H,h\leqslant x}Th=Tx\geqslant\sup_{h\in H,\,Th\leqslant Tx}Th.$$

Не следует, однако, полагать, что верно и обратное утверждение. Пусть X — пространство, полуупорядоченное телесным (т. е. содержащим алгебраически внутреннюю точку x_0) конусом. Положим $H=\{\alpha x_0\}_{\alpha\in R}$, а в качестве T возьмем произвольный положительный функционал f такой, что $f(x_0)>0$. Ясно, что $f(H)=R$, т. е. $f(H)$ является супремальным генератором K-пространства R в себе, хотя, как можно видеть, в общей ситуации H не обязан являться супремальным генератором X относительно f.

Для случая генератора относительно оператора T переносятся многие из полученных ранее результатов. Для примера сформулируем аналог теоремы 1.1.

Теорема 9.1. *Пусть X — векторное упорядоченное пространство, Y есть K-пространство, H — минорирующий конус в X, а $T:X\to Y$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *H — супремальный генератор пространства X относительно оператора T;*

(2) *для любой последовательности (T_n), где $T_n\in\in\mathscr{L}^+(X, Y)$, $\underline{\lim}_n T_nh\geqslant Th$ для всех $h\in H$, имеем (o) — $\lim_n T_nx = Tx$ для всех $x\in X$;*

(3) *любой $T'\in\mathscr{L}^+(X, Y)$ такой, что $T'h\geqslant Th$ для всех $h\in H$, совпадает с T (т. е. $\operatorname{Spr}(T, H)=\{T\}$).*

Так же, как и ранее, можно проверить, что если H натянут на не более чем счетное число образующих, то (o)-сходимость в этой теореме можно заменить на $(*)$-сходимость.

Замечание. В случае, если конус положительных элементов пространства X телесен, условие минорантности конуса H (так же, как и в случае супремального генератора относительно множества функционалов) является излишним. Детальную проверку этого факта мы предоставляем читателю.

В качестве одной из иллюстраций этой теоремы рассмотрим

Пример 9.1[1]. Пусть G — область (для простоты ограниченная) в R^n с компактной границей ∂G. Пусть $H_{\overline{G}}$ — пространство функций, гармонических и ограниченных в G, а $H_{\partial G}$ — подпространство в $C(\partial G)$, составленное из следов на ∂G функций из $HC_{\overline{G}}$, т. е. граничных значений непрерывных в $\overline{G}$ и гармонических в G функций. Отметим, что пространства $H_{\partial G}$ и $HC_{\overline{G}}$ изоморфны. Пространство $H_{\overline{G}}$ является нормальным подпространст-

[1] В этом примере используются некоторые сведения из теории потенциала, изложенные, например, в [22, 114].

вом K-пространства (в естественной упорядоченности, индуцированной из R^G) разностей положительных функций, гармонических в G. Следовательно, $H_{\bar{G}}$ является K-пространством[1].

Рассмотрим оператор $T: C(\partial G) \to H_{\bar{G}}$, сопоставляющий функции из $C(\partial G)$ (отвечающее ей) решение обобщенной задачи Дирихле. Известно, что $T \in \mathscr{L}^+(C(\partial G), H_{\bar{G}})$, при этом функции из $H_{\partial G}$ отвечает (единственный) элемент $HC_{\bar{G}}$, следом на ∂G которого она является.

Имеет место

Теорема Келдыша [82]. *Положительный росток оператора T на подпространстве $H_{\partial G}$ совпадает с $\{T\}$.*

Из этой теоремы и теоремы 9.1 следует, что для (отвечающего f) решения Tf обобщенной задачи Дирихле имеет место представление

$$Tf = \sup\{h : h \in HC_{\bar{G}},\ h(x) \leqslant f(x)\ \ (x \in \partial G)\},$$

где sup, естественно, вычисляется в K-пространстве $H_{\bar{G}}$. Очевидно, что теорема Келдыша, в свою очередь, является простым следствием полученного представления.

Основываясь на теореме 9.1 и предложении 9.1, можно получить ряд результатов об операторах с заданной абстрактной нормой. В частности, имеют место аналоги теоремы 8.1 (для случая, когда функционал p, фигурирующий в этой теореме, совпадает с нормой) и предложения 8.1, которые объединяет

Теорема 9.2. *Пусть V — нормированное пространство, Y есть K-пространство, H — конус в V и $T: V \to Y$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *конус $\bar{H} = H \times (-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(T, \|T\|)$ (где $(T, \|T\|) : (x, t) \to Tx + t\|T\|$);*

(2) *для каждого элемента $x \in V$ имеет место равенство*

$$Tx = \sup_{h \in H}(Th - \|T\| \|x - h\|);$$

(3) *если последовательность (T_n), где $T_n: V \to Y$, такова, что $\overline{\lim_n} \|T_n\| \leqslant \|T\|$ и $\underline{\lim_n} T_n h \geqslant Th$ $(h \in H)$, то $(o) - \lim_n T_n x = Tx$ для всех $x \in V$;*

[1] На этот факт обратил внимание авторов В. Н. Дятлов.

(4) *любой оператор* $T': V \to Y$ *такой, что* $|T'| \leqslant |T|$ *и, кроме того,* $T'h \geqslant Th$ *для всех* $h \in H$, *совпадает с* T.

Пусть S — единичный шар нормированного пространства V. Элемент $x \in V$ такой, что $\|x\| = 1$, называется *точкой гладкости шара* S, если существует единственный функционал $\mu_x \in V'$ такой, что $\|\mu_x\| = \mu_x(x) = 1$. Заметим, что шар S гладок, если каждая точка единичной сферы является точкой гладкости этого шара. Согласно известной теореме Мазура (см., например, [159]), точки гладкости шара произвольного банахова сепарабельного пространства образуют плотное подмножество единичной сферы. Следует иметь в виду, что точка является точкой гладкости в том и только в том случае, если норма дифференцируема (по Гато) в этой точке [62].

Справедливо следующее

Предложение 9.2. *Пусть* V — *нормированное пространство,* $x_0 \in V$ *и* $\|x_0\| = 1$. *Элемент* x_0 *является точкой гладкости единичного шара* S *в том и только в том случае, если для некоторого (а значит, и для любого)* K-*пространства* Y *и элемента* $y \in Y$, $y > 0$ *существует единственный оператор* $T: V \to Y$ *такой, что* $Tx_0 = y$ *и* $|T| = y$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка гладкости. Из теоремы 8.1 вытекает, что конус $\bar{H} = (\alpha x_0)_{\alpha \in R} \times (-R_+)$ является супремальным генератором пространства $V \times R$ относительно функционала $(\mu_{x_0}, \|\mu_{x_0}\|)$. По предложению 8.1 для всякого $x \in V$ выполняется равенство

$$\mu_{x_0}(x) = \sup_{\alpha \in R} (\alpha - \|x - \alpha x_0\|). \tag{9.1}$$

Положим $T: x \to \mu_x\ (x) y$. Тогда $Tx_0 = y$ и

$$|T| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\mu_{x_0}(x) y| = \|\mu_{x_0}\| y = y.$$

Поэтому, как следует из (9.1),

$$Tx = \sup_{\alpha \in R} (\alpha y - \|x - \alpha x_0\| y) = \sup_{h \in H} (Th - |T| \|x - h\|)$$

(здесь $H = \{\alpha x_0\}_{\alpha \in R}$).

Из теоремы 9.2 и вытекает справедливость предложения.

Замечание. Непосредственно из определения точки гладкости x (см. также теорему 8.3) вытекает, что конус $\pi_x\times(-R_+)$, где $\pi_x=\{\alpha x\}_{\alpha\in R}$, является супремальным генератором порядковой надстройки V относительно функционала $(\mu_x, 1)$. Интересно, что других прямых в V, обладающих этим свойством, нет. Точнее, если L — некоторая прямая в V, причем $L\times(-R_+)$ является супремальным генератором порядковой надстройки относительно функционала $(f, 1)$, $\|f\|=1$, то $L=\pi_x$, где x — некоторая точка гладкости (и $f=\mu_x$). Для доказательства рассмотрим гиперплоскость $H=\{v\in V:f(v)=1\}$ и пусть $\{x_0\}=L\cap H$. Если $\|x_0\|=1$, то, ввиду условия генерирования, x_0 — точка гладкости. В противном случае, найдется гиперплоскость $H'=\{v\in V:g(v)=g(x_0)\}$, проходящая через точку x_0 и выделяющая шар S. Заметим, что $g\neq f$. Не нарушая общности, можно считать, что $\|g\|<g(x_0)$. Положим $\tilde g=g/g(x_0)$. Тогда $\|\tilde g\|\leqslant 1$, $\tilde g(x_0)=1=f(x_0)$ (поскольку $x_0\in H$). Так как $L\times(-R_+)$ — генератор относительно $(f, 1)$, то $\tilde g=f$. Получается противоречие.

Построим удобную конкретизацию изложенной выше конструкции на случай, когда V является KN-линеалом ограниченных элементов (причиной этого служит отмеченное ранее обстоятельство, что конечные минорирующие конусы бывают лишь в таких пространствах). Мы считаем, что V содержится в K-пространстве Y и порядок в V индуцирован из Y.

Если H — конус V, то через $\tilde H$ обозначим коническую оболочку элемента $(-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$ (где $\mathbf{1}$ — единица в V) и конуса $\{(h, -h)\in V\times V:h\in H\}$ в пространстве $V\times V$. Имеет место

Теорема 9.3. *Пусть H — конус в KN-линеале ограниченных элементов V. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$\tilde H$ является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(E, \mathbf{1})$ (где E — оператор тождественного вложения V в Y; напомним, что $(E, \mathbf{1}):(x, t)\to x+t\mathbf{1}$);*

(2) *H является супремальным генератором пространства $V\times V$ относительно оператора $\tilde E:(x_1, x_2)\to x_1$;*

(3) *для любого элемента $x\in V$ имеет место представление*

$$x=\sup_{h\in H}(h-\|x-h\|\,\mathbf{1});$$

(4) *если последовательность операторов* (T_n), *где* $T_n: V \to Y$, *такова, что* $\|T_n\| \leqslant 1$ *и* $\underline{\lim}_n T_n h \geqslant h$ $(h \in H)$, *то* $(o) - \lim_n T_n x = x$ *для всех* $x \in V$;

(5) *любой оператор* $T: V \to Y$ *такой, что* $\|T\| \leqslant 1$ *и, кроме того,* $Th \geqslant h$ $(h \in H)$, *совпадает с* E.

Доказательство. Соотношения $(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$ следуют из теоремы 9.2. Поэтому достаточно проверить, например, $(2) \Rightarrow (3)$ и $(5) \Rightarrow (2)$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $x \in V$, тогда по условию

$$\tilde{E}(x, -x) = \sup\{\tilde{E}(\tilde{h}) : \tilde{h} \in \tilde{H}, \tilde{h} \leqslant (x, -x)\},$$

т. е.

$$x = \sup\{h - \alpha 1 : h \in H, \alpha > 0,$$

$$h - \alpha 1 \leqslant x, -h - \alpha 1 \leqslant -x\} = \sup_{h \in H} \sup\{|h - \alpha 1| : \alpha \geqslant$$

$$\geqslant 0, |h - x| \leqslant \alpha 1\} = \sup_{h \in H}(h - \|h - x\| 1).$$

$(5) \Rightarrow (2)$. Следует проверить, что положительный росток оператора $\tilde{E}$ на конусе $\tilde{H}$ совпадает с $\{\tilde{E}\}$. Итак, пусть $T \in \mathscr{L}^+(V \times \tilde{V}, Y)$, $T(h, -\tilde{h}) \geqslant \tilde{E}(h, -h) = \tilde{h}$ и, кроме того, $T(1, 1) \leqslant 1$. Пусть $T_1: x \to T(x, 0)$ и $T_2: y \to T(0, y)$, где $x, y \in V$. Имеем

$$(T_1 - T_2)h = T(h, 0) - T(0, h) =$$

$$= T(h, 0) + T(0, -h) = T(h, -h) \geqslant h.$$

Помимо этого,

$$(T_1 + T_2)1 = T(1, 1) \leqslant 1.$$

Поскольку $|T_1 - T_2| 1 \leqslant (T_1 + T_2) 1 \leqslant 1$, то $\|T_1 - T_2\| \leqslant 1$ и, следовательно, $(T_1 - T_2)x = x$ для всех $x \in V$. Заметим, что $1 \leqslant T_1 1 \leqslant T_1 1 + T_2 1 \leqslant 1$. Отсюда следует, что $T_2 = 0$. Итак, $T_1 = E$ и поскольку $T(x, y) = T_1 x + T_2 y = x$, то $T = \tilde{E}$ и теорема доказана.

Если H — подпространство, то ситуация упрощается и сводится к обычным супремальным генераторам.

Предложение 9.3. *Подпространство* H *в* V *обладает тем свойством, что* H — *супремальный генератор относительно оператора* $\tilde{E}$, *в том и только в том случае, если* $\tilde{H}$ *супремальный генератор пространства* $V \times V$ *в смысле* K-*пространства* $Y \times Y$.

Необходимость. Пусть $T: V\times V \to Y\times Y$ и $T\geqslant 0$, причем $T(h, -h)=(h, -h)$ $(h\in H)$ и $T(1, 1)\leqslant(1, 1)$. Пусть

$$T_1: (x, y)\to \mathrm{Pr}_1(T(x, y));$$
$$T_2: (x, y)\to \mathrm{Pr}_2(T(y, x)).$$

Заметим, что $T_1\geqslant 0$, $T_2\geqslant 0$, $T_1(h, -h)=h$, $T_2(h, -h)=h$ (здесь $h\in H$) и, кроме того, $T_1(1, 1)\leqslant 1$, $T_2(1, 1)\leqslant 1$. Следовательно, $T_1=T_2=\underset{\sim}{E}$. Отсюда вытекает, что

$$T(x, y)=(T_1(x, y), T_2(y, x))=(\underset{\sim}{E}(x, y), \underset{\sim}{E}(y, x))=(x, y).$$

Достаточность. Пусть $T\in\mathscr{L}^+(V\times V, Y)$, $T(h, -h)=h$ $(h\in H)$ и $T(1, 1)\leqslant 1$. Следует проверить, что $T=\underset{\sim}{E}$. Пусть

$$\tilde{T}: (x, y)\to (T(x, y), T(y, x)).$$

Тогда $\tilde{T}\geqslant 0$, $\tilde{T}(1, 1)\leqslant(1, 1)$ и, кроме того, для $h\in H$

$$\tilde{T}(h, -h)=(T(h, -h), T(-h, h))=(h, -h),$$

т. е. $\tilde{T}\in\mathrm{Spr}(\tilde{E}, H)$, где $\tilde{E}$ тождественное вложение $V\times V$ в $Y\times Y$. Таким образом, $\tilde{T}=\tilde{E}$. В частности, $T(x, y)=\underset{\sim}{E}(x, y)=x$.

Условие (2) теоремы 9.3 позволяет дать геометрическую трактовку изучаемых конусов. Приведем один пример такого рода.

Рассмотрим метрический компакт Q, снабженный положительной регулярной борелевской мерой μ, и, как обычно, символом $S(Q)$ обозначим соответствующее пространство измеримых функций. Будем считать, что компакт Q реализован в сопряженном пространстве $C'(Q)$, т. е. отождествим каждую точку $x\in Q$ с мерой Дирака ε_x. Положим $\widehat{Q}=Q\cup(-Q)$ и определим на $\widehat{Q}$ борелевскую меру $\widehat{\mu}$, считая для борелевского множества $e\subset\widehat{Q}$, что

$$\widehat{\mu}(e)=\mu(e\cap Q)+\mu(-(e\cap(-Q))).$$

Пусть $S(\widehat{Q})$ — соответствующее пространство измеримых функций.

Если H — подпространство в $C(Q)$, то символом $\widehat{H}$ обозначим конус в $C(\widehat{Q})$, натянутый на функцию -1 и множество, состоящее из функций $\hat{h}$ $(h \in H)$, где положено

$$\hat{h}(\varepsilon_x) = h(x),\ \hat{h}(-\varepsilon_x) = -h(x)\quad (x \in Q).$$

Подпространство H в $C(Q)$ назовем *двойным генератором*, если граница Шоке конуса $\hat{H}$ содержит множество Q' полной меры (т. е. $\hat{\mu}(Q') = \hat{\mu}(\hat{Q}) = 2\mu(Q)$). Как было показано в пункте 7^0, это означает, что $\hat{H}$ является супремальным генератором пространства $C(\tilde{Q})$ в смысле пространства $S(\hat{Q})$. В частности, теорема 9.3 в сочетании с предложением 7.3 приводит к следующему результату.

Предложение 9.4. *Пусть H — двойной генератор $C(Q)$ и последовательность (T_n) операторов из $C(Q)$ в $S(Q)$ такова, что*

$$\overline{\lim_n}\, |T_n|\, 1 \leqslant 1; \quad (o) - \lim_n T_n h = h \quad (h \in H).$$

Для любой функции $f \in C(Q)$ последовательность $(T_n f)$ (o)-сходится к f.

Замечание 1. Элемент $|T_n|1$, фигурирующий в условии этого предложения, совпадает с абстрактной нормой $|\!|T_n|\!|$ оператора T_n.

Замечание 2. Напомним, что в пространстве $S(Q)$ (o)-сходимость совпадает со сходимостью почти всюду.

Выше речь шла об операторах с абстрактной нормой. Представляет интерес выяснить, когда абстрактную норму можно заменить на «обыкновенную» (разумеется, в предположении, что пространство V снабжено нормой). Приведем один любопытный факт о таких операторах, отмеченный в [148].

Теорема 9.4. *Пусть V — рефлексивное банахово пространство и H — подпространство в V. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *любой оператор $T: V \to V$ такой, что $\|T\| \leqslant 1$ и, кроме того, $Th = h$ для всех $h \in H$, совпадает с тождественным оператором I;*

(2) *оператор I — единственный проектор с нормой, равной единице, и областью значений, содержащей H.*

Доказательство. Нуждается в проверке импликация $(2) \Rightarrow (1)$. Допустим противное и пусть $\|T\| = 1$,

$Th=h$ $(h\in H)$ и, кроме того, $Tx_0\neq x_0$ для некоторого $x_0\in V$. Рассмотрим статистические средние

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T^i.$$

По эргодической теореме Неймана [48] последовательность (A_n) сходится в сильной операторной топологии к проектору P пространства V на множество неподвижных точек оператора T. В частности, $Ph=h$ для $h\in H$ и $x_0\overline{\in} P(V)$. Помимо этого, для всех $x\in V$ имеем

$$\|Px\|=\lim_n\|A_nx\|\leqslant\underline{\lim}_n\|A_n\|\,\|x\|\leqslant\|x\|,$$

т. е. $\|P\|=1$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Замечание. При применении этой теоремы следует иметь в виду следующее обстоятельство. Если подпространство $H\subset V$ не обладает *свойством* (B) (т. е. если не существует проектора $P:V\to H$ с единичной нормой), то найдется не совпадающее с H подпространство V_1 в V такое, что тождественный оператор $I:V_1\to V_1$ является единственным проектором с нормой единица и областью значений, содержащей H. В частности, V_1 может совпадать с V, однако, так бывает не всегда. Например, если H — не обладающее свойством (B) подпространство V, то $H\times\{0\}$ не обладает свойством (B) в пространстве $V\times R$ (с нормой $(x,t)\to\max(\|x\|,|t|)$), однако, оператор $(x,t)\to(x,0)$ является проектором с единичной нормой пространства $V\times R$ на $V\times\{0\}$. О примерах подпространств, не обладающих свойством (B), см. соответствующие разделы в [48, 62, 77], а также [148]. К сожалению, в приведенных теоремах заменить абстрактную норму на «обыкновенную» нельзя. Приведем соответствующие примеры.

Пусть Q — дуга единичной окружности в R^2_+, длина которой γ меньше единицы и больше нуля. В качестве H возьмем подпространство в пространстве $C(Q)$ следов линейных функций на Q. Пусть $L^2(Q)$ — пространство суммируемых с квадратом (по мере Лебега) на Q функций. Нетрудно видеть, что любой оператор, совпадающий с тождественным на H и такой, что $\|T\|\leqslant 1$, является тождественным ($\underset{\sim}{H}$ является супремальным генератором пространства $C(Q)\times C(Q)$ в смысле $B(Q)\times B(Q)$, т. е. H заведомо является двойным генератором).

Поскольку пространство $L^2(Q)$ гильбертово, то существует проектор $P:L^2(Q)\to H$ с нормой единица. Положим $T:f\to Pf$ $(f\in C(Q))$. Тогда $Th=h$ $(h\in H)$ и, кроме того,

$$\|T\|=\sup_{\|f\|_{C(Q)}\leqslant 1}\|Tf\|_{L^2(Q)}\leqslant\sup_{\|f\|_{L^2(Q)}\leqslant 1}\|Pf\|=\|P\|=1.$$

Итак, построен оператор T, отличный от тождественного, совпадающий с тождественным на двойном генераторе и имеющий единичную норму.

Аналогичный пример оператора, действующего в произвольное пространство $L^p(Q)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ или в KB-пространство, нормально вложенное в $S(Q)$ и содержащее $C(Q)$, строится несколько сложнее. Ограничимся случаем $L^p(Q)$ и допустим, что $0<\gamma<2^{-p/2}$. Заметим, что H не является супремальным генератором пространства $C(Q)$ в смысле K-пространства $B(Q)$. В частности, найдется (относительно) внутренняя точка $x_0\in Q$ и функция $f\in C(Q)$, для которой $f(x_0)>\tilde{p}(x_0)$, где $\tilde{p}(x)=$ $=\sup\{h(x):h\leqslant f,\ h\in H\}$. Функционал $\tilde{p}$ сублинеен и; очевидно, непрерывен в некоторой окрестности точки x_0. Отсюда, в частности, следует, что f не является супремумом U_f и в K-пространстве $L^p(Q)$. Таким образом, найдется оператор $T\in\mathscr{L}^+(C(Q),\ L^p(Q))$ такой, что $T\neq E$ и, кроме того, $T\in\mathrm{Spr}(E,\ H)$. Заметим, что $1\leqslant(e_1+e_2)\leqslant\sqrt{2}1$ (где $e_1:x\to x_1$, $e_2:x\to x_2$). Следовательно, ввиду положительности T имеем

$$\|T\|=\|T1\|\leqslant\sqrt{2}\|1\|=\sqrt{2}\gamma^{1/p}\leqslant 1.$$

Таким образом, $Th=h$ $(h\in H)$, $\|T\|=1$ и, кроме того, $T\neq E$, хотя H (как мы видели выше) является двойным генератором[1].

Однако в случае, если Y есть KN-пространство ограниченных элементов, ситуация иная. Точнее говоря, верно

Предложение 9.5. *Пусть T — оператор, действующий из нормированного пространства V в KN-пространство ограниченных элементов. Тогда $\|T\|\leqslant 1$ в том и*

[1] Отсюда, между прочим, следует, что функция $T1$ не сравнима с единицей.

только в том случае, если T — нерастягивающий оператор (т. е. $\|T\| \leqslant 1$).

Доказательство. Неравенство $\|T\| \leqslant 1$ эквивалентно соотношению $|\!|\!|T|\!|\!| \leqslant 1$.

Замечание. Если $T: V \to B(Q)$, то $\|T\| = |\!|\!|T|\!|\!|$. В самом деле,

$$|\!|\!|T|\!|\!| = \sup_{x \in Q}\Bigl(\sup_{\|f\| \leqslant 1} |Tf|(x)\Bigr) = \sup_{x \in Q}\sup_{\|f\| \leqslant 1}(|Tf|(x)) =$$
$$= \sup_{\|f\| \leqslant 1}\sup_{x \in Q}|(Tf)(x)| = \sup_{\|f\| \leqslant 1}\|Tf\| = \|T\|.$$

Прежде, чем описать ситуации, в которых это предложение используется, введем следующее обозначение: если H — конус в $C(Q)$, то через $\tilde{\tilde{H}}$ обозначается коническая оболочка в $C(Q) \times C(Q)$ конуса $\tilde{H}$ и элемента $(1, 1)$. Иными словами, $\tilde{\tilde{H}}$ совпадает с конической оболочкой прямой $\{\alpha(1, 1)\}_{\alpha \in R}$ и конуса $\{(h, -h): h \in H\}$.

Теорема 9.5. *Пусть H — подпространство $C(Q)$, где Q компакт. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *H — супремальный генератор пространства $C(Q) \times \tilde{C}(Q)$ в смысле K-пространства $B(Q) \times B(Q)$;*

(2) *H — супремальный генератор пространства $C(Q) \times \tilde{\tilde{C}}(Q)$ в смысле $B(Q) \times B(Q)$;*

(3) *любая последовательность (T_n) нерастягивающих операторов из $C(Q)$ в $B(Q)$ такая, что равномерный $\lim\limits_n T_n h = h$ для всех $h \in H$, сходится (в сильной операторной топологии) к оператору тождественного вложения E;*

(4) *если T: $C(Q) \to B(Q)$, $\|T\| \leqslant 1$ и $Th = h$ для всех $h \in H$, то $T = E$.*

Доказательство. Импликации $(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$ вытекают из теоремы 9.3 и предложения 9.3. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна, поэтому достаточно проверить, что имеет место соотношение $(2) \Rightarrow (3)$. Этот факт можно усмотреть из теоремы 9.2, однако, будет приведено прямое доказательство.

Пусть μ — нормированный положительный линейный функционал над $C(Q)$. Рассмотрим положительный линейный оператор W_n: $C(Q) \to B(Q)$ (тензорное произведение)

$$W_n: f \to \frac{1}{2}\mu(f)(1 - |\!|\!|T_n|\!|\!|).$$

Для $f, g \in C(Q)$ положим

$$\widetilde{T}_n(f, g) = \left(T_n^+ f + T_n^- g + W_n(f+g),\right.$$
$$\left. T_n^- f + T_n^+ g + W_n(f+g)\right)$$

(где T_n^+ и T_n^- соответственно положительная и отрицательная части оператора T_n). Ясно, что $\widetilde{T}_n \in \mathscr{L}^+(C(Q) \times C(Q), B(Q) \times B(Q))$ и, кроме того,

$$\widetilde{T}_n(h, -h) = \left(T_n^+ h - T_n^- h, T_n^- h - T_n^+ h\right) =$$
$$= (T_n h, -T_n h);$$
$$\widetilde{T}_n(1, 1) = (|T_n| 1 + 2W_n 1, |T_n| 1 + 2W_n 1) =$$
$$= (\|T_n\| + (1 - \|T_n\|), \|T_n\| + (1 - \|T_n\|)) = (1, 1).$$

Последовательность $(\widetilde{T}_n)$ сильно сходится к оператору $\widetilde{E}$: $C(Q) \times C(Q) \to B(Q) \times B(Q)$ тождественного вложения на супремальном генераторе H, поэтому $(\widetilde{T}_n)$ сильно сходится к $\widetilde{E}$ на всем $C(Q) \times C(Q)$. В частности, для $f \in C(Q)$ выполняется

$$\lim_n \widetilde{T}_n(f, -f) = \lim_n (T_n f, -T_n f) = (f, -f).$$

Теорема доказана.

Приведем простой (но типичный) пример конечного конуса H, обладающего указанными в теореме свойствами.

Пусть $Q = \{x \in R^n_+ : |x| = 1\}$. Будем считать пространство R^n реализованным как гиперподпространство $\widetilde{R}^n = \left\{z \in R^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} z_k = 0\right\}$ пространства R^{n+1}. Не составляет труда убедиться, что конус $\underset{\sim}{H}$, где H — подпространство, натянутое на следы координатных функций R^{n+1} на $\widetilde{Q}$ (образ Q при данной реализации R^n), является супремальным генератором пространства $C(\widetilde{Q}) \times C(\widetilde{Q})$ в смысле $B(\widetilde{Q}) \times B(\widetilde{Q})$. (Можно проверить, что размерность минимального подпространства H, обладающего указанным свойством, в точности равна супремальному рангу Q (см. [173]).)

При сопоставлении результатов об операторах и функционалах в пространстве $C(Q)$, следует иметь ввиду два простых предложения, доказательства которых предоставляются читателю (отметим только, что существует геометрическая картинка, делающая эти предложения очевидными).

Предложение 9.6. *Пусть H — подпространство $C(Q)$. Если конус $\tilde{H}$ является супремальным генератором пространства $\tilde{C}(Q)\times C(Q)$ относительно функционала $\tilde{\varepsilon}_z:(f,g)\to f(z)$, то этот конус — супремальный генератор и относительно функционала ε_z : $(f, g)\to g(z)$.*

Предложение 9.7. *Конус H в $\tilde{C}(Q)\times C(Q)$ является супремальным генератором пространства $C(Q)\times\times C(Q)$ в смысле $B(Q)\times B(Q)$ в том и только в том случае, если H — супремальный генератор $C(Q)\times C(Q)$ относительно множества функционалов $\{\tilde{\varepsilon}_z:z\in Q\}\cup\{\varepsilon_z:z\in\in Q\}$.*

Следствие. *Пусть H — подпространство в $C(Q)$. Конус $\tilde{H}$ является супремальным генератором $C(Q)\times\times \tilde{C}(Q)$ в смысле $B(Q)\times B(Q)$ в том и только в том случае, если H — супремальный генератор относительно множества $\{\tilde{\varepsilon}_z:z\in Q\}$.*

Сопоставим результаты, относящиеся к пространству $C(Q)$. Сопоставление проведем в локальной форме, т. е. укажем элементы, на которых имеет место сходимость исследуемой последовательности при условии ее сходимости на заданном подпространстве.

Итак, из теорем этого пункта и предложения 8.2 вытекает следующая

Теорема 9.6. *Пусть H — подпространство в $C(Q)$ и $f\in C(Q)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *для каждой точки $x\in Q$ и любого $\varepsilon>0$ найдутся функции h_1, $h_2\in H$ такие, что*

$$f(z)-h_1(z)<\varepsilon-\|f-h_1\|;\quad -f(z)+h_2(z)>-\varepsilon+\|f+h_2\|;$$

(2) *для каждой точки $z\in Q$ и любой последовательности мер (μ_n) такой, что $\|\mu_n\|\leqslant 1$ и $\lim\limits_n \mu_n(h)=h(z)$ для всех $h\in H$, последовательность $(\mu_n(f))$ сходится к $f(z)$;*

(3) *для любой точки $z\in Q$ и каждой меры μ такой, что $\|\mu\|\leqslant 1$ и $\mu(h)=h(z)$ для всех $h\in H$, выполняется равенство $\mu(f)=f(z)$;*

(4) *для любой последовательности (T_n) операторов из $C(Q)$ в $B(Q)$ такой, что $\|T_n\|\leqslant 1$ и равномерный*

$\lim\limits_{n} T_n h = h$ *для всех* $h \in H$, *последовательность* $(T_n f)$ *равномерно сходится к* f;

(5) *для любого оператора* $T: C(Q) \to B(Q)$ *такого, что* $\|T\| \leqslant 1$ *и* $Th = h$ *для всех* $h \in H$, *имеем* $Tf = f$.

В заключение этого пункта уточним полученный результат для случая равностепенно непрерывных операторов.

Теорема 9.7. *Пусть* V — *нормированное пространство,* H — *конус в* V, T — *равностепенно непрерывный оператор,* $T: V \to C(Q)$. *Имеют место импликации* $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$, *где*

(1) $H \times (-R_+)$ *является супремальным генератором порядковой надстройки пространства* V *относительно множества функционалов* $\{(T_x, \|T\|): x \in Q\}$, *где* T_x: $v \to Tv(x)$, $x \in Q$;

(2) *любой оператор* $T': V \to B(Q)$ *такой, что* $\|T'\| \leqslant \|T\|$ *и, кроме того,* $T'h \geqslant Th$ $(h \in H)$, *совпадает с* T;

(3) *любая последовательность* (T_n) *операторов* $T_n: V \to C(Q)$ *таких, что* $\|T_n\| \leqslant \|T\|$ *и равномерный* $\lim\limits_{n} T_n h \geqslant Th$ *для всех* $h \in H$, *сильно сходится к* T;

(4) *любой равностепенно непрерывный оператор* $T': V \to C(Q)$ *такой, что* $\|T'\| \leqslant \|T\|$ *и, кроме того,* $T'h \geqslant Th$ $(h \in H)$, *совпадает с* T.

Доказательство. Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ следует из теоремы 8.1 и предложения 9.5. Проверим $(2) \Rightarrow (3)$. По теореме 9.2 и предложению 9.5 конус $H \times (-R_+)$ является супремальным генератором пространства $V \times R$ относительно оператора $(T, \|T\| 1)$. Поскольку по условию этот оператор и операторы $(T_n, \|T_n\| 1)$ действуют в пространство $C(Q)$, то $(T_n, \|T_n\| 1)$ сильно сходится к оператору $(T, \|T\| 1)$ на $V \times R$ по теореме 5.3. Отсюда вытекает равномерная сходимость $(T_n v)$ к Tv для любого $v \in V$. Импликация $(3) \Rightarrow (4)$ очевидна.

Из теоремы Майкла следует, что утверждения (4) и (1) «сколь угодно близки».

Теорема 9.8. *Пусть* T — *равностепенный непрерывный оператор из* V *в* $C(Q)$, H — *конус в* $C(Q)$, *а* $\varepsilon > 0$ — *фиксированное число. Если любой равностепенно непрерывный оператор* $T': V \to C(Q)$, *обладающий тем свойством, что* $T'h \geqslant Th$ *для всех* $h \in H$ *и* $\|T'\| \leqslant (1+\varepsilon) \|T\|$, *совпадает с* T, *то* H *является супремальным генератором порядковой надстройки пространства* V *относительно каждого из функционалов* $(T_x, \|T\|)$, *где* $x \in Q$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Phi: Q \to 2^{V'}$ такое, что

$$\Phi(x) = (T_x + H^*) \cap \operatorname{int}((1+\varepsilon)\|T\| S^0),$$

где S — единичный шар в V. Поскольку T — равностепенный непрерывный оператор, то отображение Φ сильно полунепрерывно снизу. Пусть $\mu_0 \in (T_{x_0} + H^*) \cap \|T\| S^0 \subset \Phi(x_0)$. По теореме Майкла найдется сильно непрерывный селектор φ отображения $x \to \overline{\Phi(x)}$ такой, что $\varphi(x_0) = \mu_0$. Поскольку

$$\overline{\Phi(x)} = \overline{(T_x + H^*) \cap \operatorname{int}((1+\varepsilon)\|T\| S^0)} \subset (T_x + H^*) \cap \\ \cap (1+\varepsilon)\|T\| S^0,$$

то $T'h \geqslant Th$ при всех $h \in H$ и, кроме того, $\|T'\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T\|$, где $(T'v)(x) = \varphi(x)(v)$. Имеем $T' = T$, следовательно, $\mu_0(v) = T'v(x_0) = Tv(x_0) = T_{x_0}(v)$ для всех $v \in V$. Теорема доказана.

10°. Некоторые применения супремальных генераторов. До сих пор рассматривались приложения супремальных генераторов, главным образом, к вопросам сходимости операторов (и, в частности, функционалов). Однако супремальные генераторы находят и другие приложения.

Пример 10.1. Здесь генераторы применяются для обобщения метода квазилинеаризации Беллмана и Калабы. Поясним идею метода квазилинеаризации на примере задачи Коши для уравнения Риккати. Итак, рассмотрим задачу Коши

$$v' + v^2 + p(x)v + q(x) = 0, \quad v(x_0) = v_0. \qquad (10.1)$$

Так как функция $x \to x^2$ ($x \in R$) выпукла, то

$$x^2 = \max_{u \in R}(2xu - u^2) \qquad (x \in R).$$

Поэтому задачу (10.1) можно переписать в виде

$$v = \min_u (u^2 - 2uv - p(x)v - q(x)), \quad v(x_0) = v_0 \qquad (10.2)$$

(здесь минимум берется по всем непрерывным функциям, определенным на R). Зафиксируем функцию u и рассмотрим задачу Коши

$$w' = u^2 - 2uw - p(x)w - q(x), \quad w(x_0) = v_0.$$

Пусть $w(u, \cdot)$ решение этой задачи, а $[x_1, x_2]$ — промежуток, на котором существует решение v задачи (10.1). Учитывая, что оператор, сопоставляющий функции g решение уравнения $y'=f(x)y+g(x)$ при начальном условии $y(x_0)=v_0$, монотонен, нетрудно убедиться в том, что решение v задачи (10.1) на промежутке $[x_1, x_2]$ имеет вид

$$v(x) = \min_{u\in U} w(u, x), \tag{10.3}$$

где множество U совпадает с пространством $C^1([x_1, x_2])$ всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[x_1, x_2]$. При этом минимум в формуле (10.3) достигается на решении v.

Основное значение в приведенной конструкции имеет то обстоятельство, что функция $x \to x^2$ выпукла и, стало быть, является верхней огибающей своих опорных аффинных функций. При этом существенно использовалось также наличие у этой функции опорного в каждой точке.

Понятно, что подобная конструкция применима для исследования произвольной задачи Коши вида

$$y'+f(y)+p(x)y+q(x)=0, \; y(x_0)=y_0,$$

где f — выпуклая гладкая функция.

Поскольку конус вогнутых квадратных трехчленов супремально порождает пространство непрерывных на отрезке функций, можно применить метод Беллмана и Калабы в существенно более общей ситуации (при этом он перестает быть методом квазилинеаризации и становится методом «квазиквадратизации»).

Рассмотрим задачу Коши

$$y'=f(x, y), \; y(x_0)=y_0, \tag{10.4}$$

где f — функция, определенная в прямоугольнике $[a, b]\times\times[c, d]$, непрерывная там и имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Считаем, что на промежутке $[a, b]$ задача (10.4) имеет решение. Покажем, что решение этой задачи может быть явно выражено квадратурой и операцией «max min». Заметим, прежде всего, что если g определена на $[c, d]$ и дважды непрерывно дифференцируема, то для $y\in[c, d]$ имеет место следующее легко проверяемое тождество:

$$g(y) = \max_{c\leqslant t<d} (-k(y-t)^2 + g'(t)(y-t) + g(t)), \tag{10.5}$$

где $k \geqslant \max(0, \max\{-g''(t)/2 : c \leqslant t \leqslant d\})$. При этом максимум в (10.5) реализуется при $t=y$. (Трехчлен, стоящий под знаком максимума, является опорным к функции g в точке y).

Рассмотрим функцию f в (10.4), и пусть K произвольное положительное число, обладающее лишь тем свойством, что

$$K \geqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d} \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right).$$

Тогда, как следует из (10.5),

$$f(x, y) = \max_{c \leqslant t \leqslant d} \left(-K(y-t)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)(y-t) + f(x, t)\right),$$
$$(a \leqslant x \leqslant b;\ c \leqslant y \leqslant d).$$

Полученное равенство позволяет переписать задачу (10.4) в виде

$$y' = \max_{v \in V} \left(-K(y-v)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)(y-v) + f(x, v)\right),$$
$$y(x_0) = y_0, \qquad (10.6)$$

где V — совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[a, b]$ и со значениями в $[c, d]$. При этом максимум в (10.6) достигается на функции y, являющейся решением задачи (10.4). Из теоремы Пикара следует, что найдется отрезок $[a', b']$ ($x_0 \in [a', b'] \subset [a, b]$) такой, что при каждом $v \in V$ уравнение Риккати

$$z' = -K(z-v)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)(z-v) + f(x, v)$$

имеет решение z_v, удовлетворяющее начальному условию $z_{v_0}(x_0) = y_0$ и определенное на $[a', b']$. Указанное решение представим в виде (10.3)

$$z_v(x) = \min_{w \in W} u(v, w, x), \qquad (10.7)$$

где $u = u(v, w, \cdot)$ — решение (при начальном условии $u(x_0) = y_0$) следующего линейного уравнения:

$$u' = \left(-2K(v-w) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)\right)u +$$
$$+ K(w^2 - v^2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)v + f(x, v), \qquad (10.8)$$

а множество W совпадает с пространством $C^1([a', b'])$ всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на $[a', b']$.

Как следует из (10.6), при любом $v \in V$ задача (10.4) может быть записана в виде

$$y' = -K(y-v)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)(y-v) + f(x, v) + p(x);$$

$$y(x_0) = y_0,$$

где p — неотрицательная непрерывная функция. Снова применяя квазилинеаризацию, получим, что

$$y(x) = \min_{w \in W} u_p(v, w, x), \tag{10.9}$$

где $u_p = u_p(v, w, \cdot)$ есть решение (при начальных данных $u_p(x_0) = y_0$) линейного уравнения, отличающегося от (10.8) лишь новым слагаемым p, добавленным к правой части. Используя (10.7) и (10.8), имеем

$$y(x) = \min_w u_p(v, w, x) = \min_w \Big(u(v, w, x) + \exp\left(-\int_{x_0}^{x}\left(-K(w-v) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)\right)dx\right) \times$$
$$\times \int_{x_0}^{x} p(x)\left(\exp\int_{x_0}^{x}\left(2K(w-v) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, v)\right)dx\right)dx\Big) \geqslant$$
$$\geqslant \min_w u(v, w, x) = z_v(x). \tag{10.10}$$

Таким образом, для всех $v \in V$

$$y(x) \geqslant z_v(x).$$

Заметим, что $y \in V$, причем, поскольку максимум в (10.6) реализуется при $v = y$, то $z_y = y$. Из сказанного вытекает соотношение

$$y(x) = \max_{v \in V} z_v(x). \tag{10.11}$$

Таким образом показано, что имеет место следующая

Теорема 10.1. *Решение y задачи* (10.4), *определенное на промежутке $[a', b']$ имеет вид*

$$y(x) = \max_{v \in V} \min_{w \in W} u(v, w, x), \tag{10.12}$$

где V — совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, отображающих $[a', b']$ в $[c, d]$, $W =$

$=C_1([a', b'])$, *а* $u(v, w, \cdot)$ *— решение линейного уравнения* (10.8) *при начальном условии* $u(x_0)=y_0$. *При этом* max min *в формуле* (10.12) *достигается при* $v=w=y$.

Замечание 1. Из представления (10.11) немедленно могут быть получены оценки решения задачи (10.4) через решения уравнений Риккати.

Замечание 2. Используя те или иные априорные оценки решения задачи (10.4), множества V и W, присутствующие в формуле (10.12), можно сузить.

Замечание 3. Из представления (10.6) можно извлечь такую итеративную («риккатизированную») схему:

$$y'_{n+1} = -K(y_{n+1}-y_n)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n)(y_{n+1}-y_n)+f(x, y_n);$$

$$y_{n+1}(x_0)=y_0.$$

Нетрудно проверить, рассуждая, как и при выводе формулы (10.10), что (при обычных предположениях) последовательность (y_n) монотонно сходится к решению задачи (10.4). В самом деле, $y'_n=f(x, y_n)-p(x)$, где p — некоторая положительная непрерывная функция. Положим $\varphi=y_{n+1}-y_n$, тогда φ является решением следующей задачи Коши:

$$\varphi' = -K\varphi^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n)\varphi + p(x); \qquad (10.13)$$

$$\varphi(x_0)=0.$$

Уравнение (10.13) является уравнением Риккати. Так как $p\geqslant 0$, то, рассуждая, как и выше, получим, что $\varphi\geqslant 0$.

Замечание 4. Конструкция «квазиквадратизации» может быть приложена и к ряду уравнений в частных производных (сравните с [73]).

Пример 10.2. В примере 10.1, в частности, было показано, что непрерывные функции на отрезке получаются из аффинных функций с помощью операции max min. Оказывается, что такое явление имеет место и в общей ситуации. Пусть Q — выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве V. Через A, как обычно, обозначим подпространство аффинных функций на Q и пусть $\tilde{P}$ есть $-P(A)$, т. е. конус вогнутых функций.

Теорема 10.2. *Для каждой функции* $f\in C(Q)$ *имеет место представление*

$$f(x) = \sup_{p\in\tilde{P},\, p\leqslant f}\ \inf_{h\in A,\, h\geqslant p} h(x) \quad (x\in Q).$$

Доказательство. Следует проверить, что конус $\tilde{P}$ является супремальным генератором $C(Q)$ в смысле

$B(Q)$. Проверим, что каждая точка $x \in Q$ лежит в границе Шоке $\mathrm{Ch}(\tilde{P})$. Для этого достаточно показать, что $\mathrm{Spr}(\varepsilon_x, \tilde{P}) = \{\varepsilon_x\}$. Пусть $\mu(p) \geqslant p(x)$ для всех $p \in \tilde{P}$. Обозначим z барицентр μ (т. е. точку, представляющую μ, или такую, что $\mu(h) = h(z)$ для всех $h \in A$). Очевидно, что $z = x$. С другой стороны, по теореме декомпозиции $\mu \underset{A}{\gg} \varepsilon_x$, т. е. $\mu(p) \leqslant p(x)$ для всех $p \in \tilde{P}$. Следовательно, $\mu(p) = p(x)$ для всех $p \in \tilde{P}$, и так как $\tilde{P} - \tilde{P}$ плотно в $C(Q)$, то $\mu = \varepsilon_x$. Теорема доказана.

Пример 10.3. (*Задача Дирихле для выпуклых функций*). В этой главе неоднократно упоминались компакты в R^n, на которых любая непрерывная функция является выпуклой (т. е. на которых следы аффинных функций составляют генератор). Это обстоятельство можно выразить в следующей простой форме. Если S — телесный строго выпуклый компакт в R^n и ∂S — граница S, то любая непрерывная на ∂S функция является следом на ∂S некоторой выпуклой функции, определенной на S. В самом деле, конус A следов аффинных функций на ∂S, очевидно, является супремальным генератором $C(\partial S)$.

Таким образом, обозначив $U_f = \{h \in A : h(x) \leqslant f(x)\ (x \in \partial S)\}$ и положив $\tilde{f}(x) = \sup\{h(x) : h \in U_f\}$ $(x \in S)$, получим распространение функции f из $C(\partial S)$ до выпуклой функции $\tilde{f}$, определенной на S.

Замечание. Приведенные рассуждения справедливы и для любой полунепрерывной снизу функции f, определенной на ∂S, поскольку (см. Введение, пункт 3^0) $f \in P(C(\partial S), \bar{R}^{\partial S}, \bar{R}^{\partial S})$.

Пример 10.4. Пусть $n \geqslant 4$. Пусть A — множество $n \times n$-квадратных матриц с фиксированной главной диагональю. Упорядочим его естественным способом.

Теорема 10.3. *Для каждой матрицы $a \in A$ найдутся вырожденные матрицы $\underline{a}$, $\bar{a} \in A$ такие, что $\underline{a} \leqslant a \leqslant \bar{a}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием того тривиального факта, что $\mathrm{sim}(R^n) = 2$. В самом деле, следует выбрать трехмерный генератор в R^n и для каждой строки $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ матрицы a указать вектор $\underline{a}_i$ из генератора такой, что $\underline{a}_{ij} \leqslant a_{ij}$ $(i \neq j)$ и $\underline{a}_{ii} = a_{ii}$. Матрица $\underline{a} = (\underline{a}_{ij})$, очевидно, минорирует a и, кроме того, $\underline{a}$ — вырождена. Аналогично строится матрица $\bar{a}$. Теорема доказана.

Замечание. При $n < 4$ теорема 10.3 не верна.

ГЛАВА IV

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

0°. Введение. В этой главе будут рассмотрены приложения некоторых из полученных выше результатов к исследованию экстремальных задач изопериметрического типа в геометрии выпуклых множеств.

Изопериметрическая задача — это одна из первых решенных человечеством экстремальных задач с ограничениями. Эта задача является и простейшей экстремальной задачей, так как в ней присутствует лишь одно ограничение — на периметр искомой фигуры. История развития исследований изопериметрической задачи в пределах выпуклой геометрии достаточно полно изложена во многих популярных и специальных книгах. Важно отметить, что в начале нашего века эти исследования привели к двум фундаментальным результатам: к теореме Бляшке и к теореме Брунна — Минковского. Теорема Бляшке дала возможность доказывать теоремы существования решения. Теорема Брунна — Минковского, в свою очередь, позволила усовершенствовать технику различного рода симметризаций. Поясним этот метод на элементарном, но поучительном примере задачи Бибербаха — среди фигур данного диаметра найти фигуру максимального объема:

$$1.\quad d(\mathfrak{r})\leqslant d_0,$$

$$2.\quad V(\mathfrak{r})\text{ — достигает максимума.}$$

(Как обычно, выпуклая фигура и ее опорная функция обозначены одним символом). Нетрудно видеть, что условие 1 можно заменить условием

$$d(\mathfrak{r})\leqslant d_0.$$

Покажем, что при симметризации Минковского диаметр фигуры не меняется. В самом деле, по определению для симметризации Минковского $\mathfrak{x}^s$ фигуры $\mathfrak{x}$ имеем

$$\mathfrak{x}^s(z) = \frac{\mathfrak{x}(z) + \mathfrak{x}(-z)}{2}.$$

Следовательно,

$$d(\mathfrak{x}^s) = \max_{z \in Z_n} [\mathfrak{x}^s(z) + \mathfrak{x}^s(-z)] = \max_{z \in Z_n} [\mathfrak{x}(z) + \mathfrak{x}(-z)] = d(\mathfrak{x}).$$

Заметим, что по теореме Брунна — Минковского

$$\sqrt[n]{V(\mathfrak{x}^s)} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{V(\mathfrak{x})} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{V(\mathfrak{x})} = \sqrt[n]{V(\mathfrak{x})}.$$

Так что $V(\mathfrak{x}^s) \geqslant V(\mathfrak{x})$ для каждой фигуры $\mathfrak{x}$. Следовательно, решением задачи не может быть не центрально-симметричная фигура. Кроме этого, центрально-симметричная фигура имеет диаметр, не превосходящий d_0, в том и только в том случае, если она лежит (с точностью до сдвига) в шаре диаметра d_0. Итак, задача Бибербаха свелась к следующей элементарной задаче: среди фигур, лежащих в шаре диаметра d_0, найти фигуру максимального объема. Из монотонности объема видно что решением является шар диаметра d_0.

На приведенном примере использования простейшей техники симметризаций видны изящество и слабость подобных приемов. Основание метода симметризаций — чрезвычайно специфическая структура ограничений. Неудивительно поэтому, что интерес к проблематике экстремальных задач геометрии выпуклых множеств, приведший в начале века к определенным достижениям, впоследствии угас. Центр тяжести исследований был перенесен на другие экстремальные задачи и в класс иных объектов, например, в рамки теории двумерных многообразий ограниченной кривизны и т. п. В то же время одним из наиболее сложных примеров решенных экстремальных задач выпуклой геометрии остается задача максимизации площади плоской фигуры при заданных периметре и радиусах вписанного и описанного кругов, т. е. экстремальная задача с тремя дополнительными ограничениями.

А. Д. Александров, разработавший аппарат поверхностных функций для решения знаменитой проблемы

Минковского об определенности выпуклой поверхности кривизной, как функцией нормали, впервые обратил внимание на то, что формальное применение метода множителей Лагранжа к изопериметрической задаче немедленно приводит к ответу. Идея множителей Лагранжа, лежащая в основе современной теории экстремальных задач, изучаемой в рамках математического программирования — одного из разделов выпуклого анализа, перспективна тем, что методы, основанные на ней, позволяют однотипно исследовать задачи со многими ограничениями. Более того, сам метод двойственности в математическом программировании есть точный аналог метода множителей Лагранжа. В связи с этим, целесообразно применить общие методы выпуклого анализа к исследованию экстремальных задач с ограничениями в геометрии выпуклых множеств. Как известно, применение этого подхода связано с выполнением следующей программы: перевод задачи с геометрического языка на язык программирования; двойственный анализ полученной задачи и, наконец, обратный перевод полученных результатов в исходные геометрические термины.

Для реализации этой схемы следует выбрать, прежде всего, векторное пространство, в котором будет проводиться исследование. Наиболее естественным (хотя, в принципе, и не единственным) пространством такого рода служит, безусловно, пространство выпуклых множеств, построенное в главе I. В основе этого лежат простое поведение геометрических функционалов относительно топологической и алгебраической структур этого пространства, ясная трактовка линейных функционалов над этим пространством (мер, тесно связанных с выпуклыми множествами теоремой Александрова) и, наконец, известный явный вид поляры конуса выпуклых множеств (или опорных функций).

В предлагаемой главе будут изложены основные приемы исследования экстремальных задач с ограничениями в геометрии выпуклых множеств. Как правило, рассматриваются задачи, в которых ограничения и максимизируемая функция задаются на смешанные объемы. Отдельно будет проведен анализ ограничения вида: фигура содержится в фиксированной фигуре. Искомую фигуру обычно следует найти в классе всех выпуклых фигур. Однако уместно подчеркнуть, что данное в главе II описание поляр конусов различных H-выпуклых множеств позволяет, естественно, исследовать задачи, в которых решение лежит в одном из изучавшихся ранее классов H-выпуклых множеств.

1°. Общая задача изопериметрического типа. Пусть заданы выпуклые тела $\mathfrak{A}_1^i, \mathfrak{A}_2^i, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m_i}^i, \mathfrak{B}^i$ $(i=0, 1, \ldots, s)$ и числа $b_1, \ldots, b_s \in R_+$.

Задача 1.1. Среди выпуклых фигур $\mathfrak{x}$, удовлетворяющих следующим условиям на смешанные объемы —

$$V_{m_i, k_i}(\mathfrak{A}^i, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}^i) \leqslant b_i \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

найти фигуру $\bar{\mathfrak{x}}$, доставляющую максимум смешанному объему $V_{m_0,k_0}(\mathfrak{A}^0, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}^0)$.

Будем считать функции $V_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}_i, \cdot, \mathfrak{B}^i)$ распространенными с сохранением полилинейности и непрерывности на пространство выпуклых множеств $[\mathfrak{B}_n]$. Эти распространения обозначим $G_i (i=0, 1, \ldots, s)$. Тогда поставленную задачу можно сформулировать как следующую задачу математического программирования. Найти элемент $\mathfrak{x} \in [\mathfrak{B}_n]$ такой, что

1. $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_n$;
2. $G_i(\mathfrak{x}) \leqslant b_i$;
3. $\tilde{G}_0(\mathfrak{x})$ достигает максимума.

Перед анализом полученной задачи обратимся к следующей более общей ситуации. Пусть X — локально выпуклое пространство, K — конус в пространстве X, функционалы $G_0, G_1, \ldots, G_s$ определены и дифференцируемы по Гато в некоторой окрестности U точки $\bar{x} \in X$. Причем выполняется *условие Слейтера* ([185]), т. е. $(G_i)'_{\bar{x}}(\bar{x}) \neq 0$ $(i=0, \ldots, s)$ и числа

$$(G_1)'_{\bar{x}}(\bar{x}), \quad (G_2)'_{\bar{x}}(\bar{x}), \quad \ldots, (G_s)'_{\bar{x}}(\bar{x})$$

одного знака. Положим

$$K_{\bar{x}} = \{u \in X: \exists_{\alpha_0>0}: \bar{x} + \alpha u \in K\,(0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0)\}.$$

Предположим теперь, что в точке $\bar{x}$ функционал G_0 достигает максимума на множестве

$$\Omega = K \cap \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in U: G_i(x) \leqslant b_i\}.$$

Предложение 1.1[1]. *Существуют функционал $\bar{f} \in K_{\bar{x}}^*$ и числа $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s \in R_+$, не равные нулю одновременно, такие, что выполняется уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$(G_0)'_{\bar{x}} + \bar{f} = \sum_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i (G_i)'_{\bar{x}}.$$

Доказательство. Положим

$$K_0 = \left\{u \in X \colon (G_0)'_{\bar{x}}(u) > 0\right\};$$

$$K_i = \left\{u \in X \colon (G_i)'_{\bar{x}}(u) < 0\right\} \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Покажем сначала, что $\left(\bigcap_{i=0}^{s} K_i\right) \cap K_{\bar{x}} = \varnothing$. Допустим противное и пусть $u \in K_{\bar{x}}$ и $u \in K_i$ $(i=0, 1, \ldots, s)$. Так как $u \in K_i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, то при достаточно малых $\alpha > 0$ имеем $G_i(\bar{x} + \alpha u) - b_i \leqslant G_i(\bar{x} + \alpha u) - G_i(\bar{x}) = \alpha (G_i)'_{\bar{x}}(u) + o(\alpha) \leqslant 0$ (здесь $o(\alpha)/\alpha \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$). Таким образом, $\bar{x} + \alpha u \in \{x \in U \colon G_i(x) \leqslant b_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, s)$. Кроме того, так как $u \in K_{\bar{x}}$, то $\bar{x} + \alpha u \in K$. Итак, $\bar{x} + \alpha u \in \Omega$. С другой стороны, поскольку $u \in K_0$ и в точке $\bar{x}$ достигается максимум, то $G_0(\bar{x} + \alpha u) - G_0(\bar{x}) = \alpha (G_0)'_{\bar{x}}(u) + o(\alpha) \leqslant 0$, откуда следует, что $(G_0)'_{\bar{x}}(u) \leqslant 0$ — противоречие.

Рассмотрим в пространстве X^{s+1} конусы

$$K' = K_0 \times K_1 \times \ldots \times K_s; \quad K'' = \left(K_{\bar{x}}\right)^{s+1} \cap D,$$

где $D = \{(x, x, \ldots, x) \in X^{s+1} \colon x \in X\}$. Конусы K' и K'' не пересекаются, причем конус K' телесен. Следовательно, найдется ненулевой функционал $l = (l_0, l_1, \ldots, l_s) \in (X^{s+1})'$ такой, что $l(z) \geqslant 0$ $(z \in K')$, $l(z) \leqslant 0$ $(z \in K'')$. Последнее означает, что

$$l_0(u_0) + l_1(u_1) + \ldots + l_s(u_s) \geqslant 0 \quad (u_i \in K_i;\ i = 0, 1, \ldots, s);$$

$$l_0(v) + l_1(v) + \ldots + l_s(v) \leqslant 0 \quad (v \in K_{\bar{x}}).$$

Зафиксируем $u_0 \in K_0$ и, устремляя u_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ к нулю, получим, что $l_0(u_0) \geqslant 0$ $(u_0 \in K_0)$. Таким же об-

[1] Доказательство этого предложения следует известной работе А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина [59].

разом проверяется, что $l_i(u_i)\geqslant 0$ $(u_i\in K_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$. Полагая $l_{\bar{x}}=\sum_{i=0}^{s} l_i$, получим, что $l_{\bar{x}}(v)=\left(l_0+\sum_{i=1}^{s} l_i\right)(v)\leqslant 0$ для всех $v\in K_{\bar{x}}$. Итак, показано, что

$$l_0\in K_0^*;\ l_i\in K_i^*\ (i=1,\ 2,\ \ldots,s);$$
$$l_{\bar{x}}\in -\left(K_{\bar{x}}^*\right). \tag{1.1}$$

По условию функционал G_i дифференцируем по Гато, т. е. конус K_i $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ s)$ является полупространством. Но тогда

$$K_i^*=\left\{\alpha(G_i)'_{\bar{x}}\right\}_{\alpha\leqslant 0}\ (i=1,\ \ldots,s);$$
$$K_0^*=\left\{\alpha(G_0)'_{\bar{x}}\right\}_{\alpha\geqslant 0}. \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что найдутся такие $\beta_i\leqslant 0$ $(i=0,\ \ldots,\ s)$, что $l_i=\beta_i(G_i)'_{\bar{x}}(i=1,\ldots,s)$ и $l_0=-\beta_0(G_0)'_{\bar{x}}$. Таким образом, мы получили, что

$$-\beta_0(G_0)'_{\bar{x}}=l_{\bar{x}}-\sum_{i=1}^{s}\beta_i(G_i)'_{\bar{x}}. \tag{1.3}$$

Если $\beta_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$, то $l_0\neq 0$, поскольку $l\neq 0$. С другой стороны, в этом случае $-\beta_0(G_0)'_{\bar{x}}(\bar{x})=l_{\bar{x}}(\bar{x})$. Но так как $\bar{x}\in K_{\bar{x}}$ и $-\bar{x}\in K_{\bar{x}}$, то $l_{\bar{x}}(\bar{x})=0$, т. е. и $\beta_0=0$, ибо по условию $(G_0)'_{\bar{x}}(\bar{x})\neq 0$. Из (1.3) следует, что в этом случае $l_0=0$, а это противоречие. Теперь следует заметить, что

$$-\beta_0(G_0)'_{\bar{x}}(\bar{x})=l_{\bar{x}}(\bar{x})-\sum_{i=1}^{s}\beta_i(G_i)'_{\bar{x}}(\bar{x})=$$
$$=\sum_{i=1}^{s}\beta_i(G_i)'_{\bar{x}}(\bar{x})\neq 0.$$

Значит, $\beta_0\neq 0$. Предложение доказано.

Замечание. Если функционалы G_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,s)$ непрерывны в точке $\bar{x}$, то можно утверждать, что найдутся коэффициенты $\bar{\alpha}_i$, обладающие *свойством дополняющей нежесткости* (для $\bar{x}$), т. е. $\bar{\alpha}_i$ не равны нулю одновременно и $\bar{\alpha}_{i_0}=0$, если $G_{i_0}(\bar{x})<b_{i_0}$. Действительно, в этом случае в качестве конуса K_{i_0} можно взять все

пространство X и единственный неотрицательный на K_{i_0} функционал совпадает с нулем.

Проверим теперь, что для задачи 1.1 выполнены условия предложения 1.1.

Можно видеть, что градиент функционала $\tilde{G}_i$ пропорционален $\mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}^i)$ В самом деле (см. приложение II),

$$(\tilde{G}_i)'_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \frac{m_i - k_i}{n} \int_{Z_n} g d\mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}^i)$$

для всех $g \in [\mathfrak{B}_n]$. (Так как $\mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}^i)$ есть мера Радона, т. е. элемент пространства $C'(Z_n)$, то $\mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) \in [\mathfrak{B}_n]'$, ибо $[\mathfrak{B}_n]$ плотно в $C(Z_n)$). Предположим, что решением поставленной задачи 1.1 является телесный выпуклый компакт $\bar{\mathfrak{x}}$. Тогда

$$(\tilde{G}_i)'_{\bar{\mathfrak{x}}}(\bar{\mathfrak{x}}) = \frac{m_i - k_i}{n} \int_{Z_n} \bar{\mathfrak{x}} d\mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}^i) =$$

$$= (m_i - k_i) V_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}^i) > 0,$$

так как фигуры $\mathfrak{A}_1^i, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m_i}^i, \mathfrak{B}^i, \bar{\mathfrak{x}}$ телесны. Следовательно, для поставленной задачи математического программирования выполняется условие Слейтера и, следовательно, можно применить предложение 1.1. Таким образом, установлена

Теорема 1.1. *Если допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением задачи* 1.1, *то найдутся обладающие свойством дополняющей нежесткости числа* $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s \in R_+$ *такие, что*

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i \mu_{m_i,k_i}(\mathfrak{A}^i, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}^i) - \mu_{m_0,k_0}(\mathfrak{A}^0, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}^0) \in \mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}.$$

Здесь, как обычно, $\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})$ — соответствующая поверхностная функция, а $\mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ — *конус допустимых направлений в точке* $\bar{\mathfrak{x}}$, т. е.

$$\mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}} = \{g \in C(Z_n) : \exists \alpha_0 > 0 :$$

$$\bar{\mathfrak{x}} + \alpha g \in \mathfrak{B}_n (0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0)\}.$$

Итак, применение общего принципа двойственности к исследованию экстремальной задачи 1.1 вопрос о нахождении решения сводит к проблеме представления элементов конуса $\mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ и теоремам единственности для поверхностных функций. Первая из задач связана с рассмотренной выше задачей о представлении конуса, сопряженного к конусу H-выпуклых функций.

В следующем параграфе дается геометрическая интерпретация элементов сопряженного конуса $\mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$.

2°. Отношение T-предшествования. Конус $\mathfrak{B}_n$, как было показано в главе I — это конус непрерывных сублинейных функций над R^n, или конус R^n-выпуклых функций, где R^n рассматривается как конус следов линейных функций на сферу направлений $Z_n = \{x \in R^n: |x| = 1\}$, т. е. $\mathfrak{B}_n = P\left(R^n, C(Z_n), \widetilde{R}^{Z_n}\right)$. Конус R^n не является минорирующим и, следовательно, не обладает свойством Харди—Литтлвуда—Полиа. Однако, как и всякий замкнутый конус, R^n обладает свойством Решетняка—Люмиса (в $C(Z_n)$ или в $[\mathfrak{B}_n]$).

Теорема 2.1. $\mathfrak{B}^*_n = \left\{\mu - \nu \in C'(Z_n) : \mu \underset{R^n}{\geqslant} \nu\right\}$.

Эта теорема дает основание ввести следующее определение. Будем говорить, что выпуклая фигура $\mathfrak{y}$ *T-предшествует* фигуре $\mathfrak{x}$, если $\mu(\mathfrak{x}) \underset{R^n}{\geqslant} \mu(\mathfrak{y})$. В этой ситуации используется запись $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$. Отношение T-предшествования допускает простую внутреннюю характеристику.

Теорема 2.2. *Фигура $\mathfrak{y}$ T-предшествует $\mathfrak{x}$ в том и только в том случае, если для любой выпуклой поверхности $\mathfrak{z}$ справедливо неравенство $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) \geqslant V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$.*

Необходимость. Раз $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$, значит, $\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{B}^*_n$, т. е.

$$V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{n} \int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{x}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n} \int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{y}) = V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) \; (\mathfrak{z} \in \mathfrak{B} O_n).$$

Достаточность. В результате плотности $\mathfrak{B}O_n$ в $\mathfrak{B}_n$ для любой сублинейной функции f имеем

$$\int\limits_{Z_n} f d\mu(\mathfrak{x}) \geqslant \int\limits_{Z_n} f d\mu(\mathfrak{y}),$$

и, следовательно, по теореме 2.1 $\mu(\mathfrak{x}) \underset{R^n}{\gg} \mu(\mathfrak{y})$.

Из этой теоремы непосредственно следует, что отношение T-предшествования есть предпорядок. Кроме того, справедливо следующее

Предложение 2.1. *Пусть один из выпуклых компактов* $\mathfrak{x}$ *и* $\mathfrak{y}$ *телесен. Тогда* $(\mathfrak{x} \underset{T}{\gtrsim} \mathfrak{y}$ *и* $\mathfrak{y} \underset{T}{\gtrsim} \mathfrak{x}) \Rightarrow \mathfrak{x} \underset{T}{=} \mathfrak{y}$.

Доказательство. В самом деле, по теореме 2.2

$$\int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{x}) = \int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{y})$$

для любых $\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}O_n$. Так как $\overline{\mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}_n} = C(Z_n)$ и $\mathfrak{B}O_n$ плотно в $\mathfrak{B}_n$, то $\mu(\mathfrak{x}) = \mu(\mathfrak{y})$. Поскольку один из компактов телесен, то мера $\mu(\mathfrak{x})$ является александровской, а значит, по теореме Александрова $\mathfrak{x} \underset{T}{=} \mathfrak{y}$.

Отношение T-предшествования удобно тем, что с его помощью удается описать сопряженный конус $\mathfrak{B}_n^*$ на языке исходного пространства выпуклых множеств.

Теорема 2.3. $\mathfrak{B}_n^* = \{\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) : \mathfrak{x} \underset{T}{\gtrsim} \mathfrak{y}\}$.

Доказательство. На основе теоремы 2.1 достаточно показать, что из возможности представить меру $\bar{\mu}$ в виде $\mu - \nu$, где $\mu \underset{R^n}{\gg} \nu$, следует, что $\bar{\mu} = \mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y})$, где $\mathfrak{x} \underset{T}{\gtrsim} \mathfrak{y}$.

Рассмотрим отображения

$$z \to \int\limits_{Z_n} z d\mu \quad (z \in R^n);$$

$$z \to \int\limits_{Z_n} z d\nu \quad (z \in R^n).$$

Ввиду линейности этих отображений найдутся векторы $u, v \in R^n$ такие, что $\mu(z) = (u, z)$; $\nu(z) = (v, z)$ для всех $z \in R^n$. Так как

$$\int\limits_{Z_n} z d\bar{\mu} = \int\limits_{Z_n} z d\mu - \int\limits_{Z_n} z d\nu = 0$$

для любой линейной функции $z \in R^n$, то $u = v$.

Положим

$$\mu_1 = \mu + \mu(\mathfrak{z}_n) + |u|\,\varepsilon_{-\frac{u}{|u|}};\quad \mu_2 = \nu + \mu(\mathfrak{z}_n) + |\nu|\,\varepsilon_{-\frac{v}{|v|}}.$$

(Здесь $\mu(\mathfrak{z}_n)$ есть поверхностная функция шара $\mathfrak{z}_n$, т. е. мера Лебега). Очевидно, что $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2$. Таким образом, $\mu_1 \underset{R^n}{\gg} \mu_2$. Заметим, что мера μ_1 является александровской. В самом деле, для $i = 1, \ldots, n$ имеем

$$\int\limits_{Z_n} e_i d\mu_1 = \int\limits_{Z_n} e_i d\mu + \int\limits_{Z_n} e_i d\mu(\mathfrak{z}_n) - (u, e_i) = (u, e_i) - (u, e_i) = 0.$$

Кроме того, для всякого гиперподпространства $H \subset R^n$ имеем $\mu_1(Z_n \cap H) < \mu_1(Z_n)$, так как $\mu(\mathfrak{z}_n)(Z_n \cap H) < \mu(\mathfrak{z}_n)(Z_n)$. Аналогично проверяется, что мера μ_2 является александровской. Применим теорему Александрова и найдем выпуклые фигуры $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}_n$ такие, что $\mu_1 = \mu(\mathfrak{x})$ и $\mu_2 = \mu(\mathfrak{y})$. Так как $\mu(\mathfrak{x}) \underset{R^n}{\gg} \mu(\mathfrak{y})$, то $\mathfrak{x} \gtrsim \mathfrak{y}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отношение $\underset{T}{\gtrsim}$ достаточно обозримо и в то же время в известном смысле эффективно проверяемо. Дело в том, что для многогранников $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ с поверхностными функциями $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k \varepsilon_{z_k}$ и $\sum\limits_{s=1}^{m} \beta_s \varepsilon_{y_s}$ отношение $\mathfrak{x} \underset{T}{\gtrsim} \mathfrak{y}$ имеет место в том и только в том случае, если $\mu(\mathfrak{x}) \underset{R^n}{\gg} \mu(\mathfrak{y})$ или, в развернутом виде, если совместна система линейных неравенств

$$\begin{cases} \gamma_k^s \geqslant 0; \\ \sum\limits_{s=1}^{m} \gamma_k^s = 1; \quad (k = 1, 2, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots, m); \\ \sum\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^s \alpha_k z_k = \beta_s y_s. \end{cases}$$

Проверка совместности линейной системы с вычислительной точки зрения — это задача линейного программирования [1].

[1] Сведения из теории линейного программирования см., например, в [79, 146].

Интересной и важной является задача о связи отношений T-предшествования и T-вхождения (напомним, что $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$ означает, что $\mathfrak{y}$ можно разместить в $\mathfrak{x}$ путем параллельного переноса).

Предложение 2.2. *Пусть* $\mathfrak{x}_1 \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}_{n-1}$. *Тогда* $\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \underset{R^n}{\gg} \mu(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})$.

Доказательство. В самом деле, ввиду свойства монотонности смешанного объема, для любой сублинейной функции $\mathfrak{z}$ имеем $V(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \geqslant V(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1})$. Следовательно,

$$\int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) = nV(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \geqslant$$
$$\geqslant nV(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}) = \int\limits_{Z_n} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-1}).$$

Применяя теорему 2.1, получим требуемое.

Предложение 2.3. *Если* $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$, *то* $\mathfrak{x} \underset{T}{\gtrless} \mathfrak{y}$.

Доказательство. Имеем $\mu(\mathfrak{x}) = \mu(\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x})$; $\mu(\mathfrak{y}) = \mu(\mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{y})$, значит, по предложению 2.2 $\mu(\mathfrak{x}) \underset{R^n}{\gg} \mu(\mathfrak{y})$, т. е. $\mathfrak{x} \underset{T}{\gtrless} \mathfrak{y}$.

К сожалению, обратное утверждение не имеет места. В самом деле, пусть $n > 2$, $\alpha > 1$. Фигуры $\mathfrak{z}_n$ и $\alpha\mathfrak{z}_{n-2}$ не сравнимы по отношению $\underset{T}{\geqslant}$, однако, $\mathfrak{z}_n \underset{T}{\gtrless} \alpha\mathfrak{z}_{n-2}$. Действительно, $\mu(\alpha\mathfrak{z}_{n-2}) = \alpha^{1/(n-1)}\mu(\mathfrak{z}_{n-2}) = 0$. Кроме того, $\mu(\mathfrak{z}_n)(e_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, так что $\mu(\mathfrak{z}_n) \underset{R^n}{\gg} 0$. Не следует думать, что это обстоятельство связано только с вырожденностью множества $\mathfrak{z}_{n-2}$. Возьмем, например, $\mathfrak{x} = 2\mathfrak{z}_n$ и $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_n + \gamma\mathfrak{z}_{n-2}$, где $\gamma = \beta^{1/(n-2)}$, а число β выбрано из условия $2^{n-1}/(2^{n-1} - 1) > \beta > 1$. Так как $\gamma > 0$, то $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ не сравнимы в смысле отношения $\underset{T}{\geqslant}$. С другой стороны, $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) \geqslant V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ для любой выпуклой поверхности $\mathfrak{z}$, т. е. по теореме 2.2 $\mathfrak{x} \underset{T}{\gtrless} \mathfrak{y}$. Так как $V_1(\mathfrak{z}_{n-2}, \mathfrak{z}) = 0$, то ввиду полилинейности и монотонности смешанного объема последовательно имеем

$$V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \gamma^k V(\mathfrak{z}_n, \ldots, \mathfrak{z}_n, \mathfrak{z}_{n-2}, \ldots, \mathfrak{z}_{n-2}, \mathfrak{z}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^{k} \gamma^{k} V_1(\mathfrak{z}_n, \mathfrak{z}) + \gamma^{n-1} V_1(\mathfrak{z}_{n-2}, \mathfrak{z}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^{k} \gamma^{k} V_1(\mathfrak{z}_n, \mathfrak{z}) \leqslant (2^{n-1} - 1)\beta V_1(\mathfrak{z}_n, \mathfrak{z}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n-1} V_1(\mathfrak{z}_n, \mathfrak{z}) = V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}).$$

Необходимо выяснить связь отношений T-предшествования и T-вхождения на плоскости. Оказывается, что в этом случае рассматриваемые отношения совпадают. Чтобы проверить этот факт, установим полезное

Предложение 2.4. *Пусть функция $f \in C(Z_n)$ такова, что для любой, положительной, инвариантной относительно сдвигов меры μ справедливо неравенство $\mu(f) \geqslant 0$. Найдется вектор $c \in R^n$ такой, что $f(z) \geqslant (c, z)$ для всех $z \in Z_n$.*

Доказательство. Определим функцию $\hat{f}: R^n \to R$ соотношением

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \\ |x| f\left(\frac{x}{|x|}\right), & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $\operatorname{epi} \hat{f}$ — надграфик функции f. Обозначим символом N выпуклую оболочку $\operatorname{epi} f$. Тогда

$$N = \Big\{ z \in R^n \times R : z = \sum_{p=1}^{s} z_p,\ z_p \in \operatorname{epi} \hat{f}$$

$$(p = 1, \ldots s;\ s = 1, 2, \ldots) \Big\}.$$

Ясно, что N — конус, причем точка $(0, 1) \in R^n \times R$ принадлежит внутренности N. Определим луч L соотношением

$$L = \{z = (0, t) \in R^n \times R : t < 0\}.$$

Допустим, что множества N и L пересекаются, тогда найдутся векторы $z_p \neq (x_p, t_p) \in \operatorname{epi} \hat{f}$ $(p = 1, 2, \ldots, s)$ такие, что $\sum\limits_{p=1}^{s} x_p = 0$ и $\sum\limits_{p=1}^{s} t_p < 0$. По определению надграфика получаем

$$\sum_{n=1}^{s} f(x_p) \leqslant \sum_{p=1}^{s} t_p < 0.$$

Так как $f(0)=0$, то множество $J=\{p\in\{1,2\ldots,s\}: x_p\neq 0\}$ не пусто. Образуем меру

$$\mu=\sum_{p\in J}|x_p|\,\varepsilon_{\frac{x_p}{|x_p|}}.$$

Мера μ неотрицательна и, кроме того, инвариантна относительно сдвигов, так как

$$\int_{Z_n} e_i d\mu=\sum_{p\in J}(x_p, e_i)=0.$$

Таким образом,

$$0\leqslant\int_{Z_n} f d\mu=\sum_{p\in J}|x_p|\,f\left(\frac{x_p}{|x_p|}\right)=\sum_{p=1}^{s}\widehat{f}(x_p)<0.$$

Полученное противоречие означает, что $N\cap L=\varnothing$. Следовательно, найдется гиперплоскость H, разделяющая N и L. Так как внутренность N выделяется строго и, кроме того, $0\in H$, то гиперпространство $H\subset R^n\times R$ является графиком некоторого линейного функционала $c\in(R^n)'=R^n$. Этот функционал, очевидно, требуемый.

Теорема 2.4. *Пусть $n=2$. Тогда* $\mathfrak{x}\underset{T}{\geqslant}\mathfrak{y}\Leftrightarrow\mathfrak{x}\underset{T}{\geqslant}\mathfrak{y}$.

Доказательство. Нуждается в проверке лишь импликация $\Rightarrow$. Так как $\mathfrak{x}\underset{T}{\geqslant}\mathfrak{y}$, то по теореме 2.3 для любой выпуклой фигуры $\mathfrak{z}\in\mathfrak{V}_2$ имеем $V(\mathfrak{x},\mathfrak{z})\geqslant V(\mathfrak{y},\mathfrak{z})$.

Единственными «вырожденными», инвариантными относительно сдвигов, положительными мерами из $C'(Z_2)$ являются меры вида $\alpha(\varepsilon_z+\varepsilon_{-z})$, т. е. поверхностные функции отрезков, поэтому на основе предложения 2.4 найдется вектор $c\in R^2$ такой, что для всех $z\in Z_2$ справедливо неравенство $\mathfrak{x}(z)-\mathfrak{y}(z)\geqslant(c, z)$. Последнее и означает, что $\mathfrak{x}\underset{T}{\geqslant}\mathfrak{y}$.

В заключение этого пункта следует привести теорему о представлении поляры конуса, сопряженного к конусу возможных направлений. Конус $\mathfrak{V}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ возможных направлений в точке $\bar{\mathfrak{x}}$ определяется следующим способом:

$$\mathfrak{V}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}=\{g\in C(Z_n):\exists_{\alpha_0>0}:\bar{\mathfrak{x}}+\alpha g\,\mathfrak{V}\in{}_n\,(0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0)\}.$$

Теорема 2.5. *Имеют место представления*:

(1) $\mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}} = \left\{\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) : \mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y},\ V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})\right\}$;

(2) $\mathfrak{B}^*_{2,\bar{\mathfrak{x}}} = \left\{\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) : \mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y},\ V(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) = V(\mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{x}})\right\}$.

Доказательство. Пусть сначала $g \in \mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$, $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$ и $V_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) = V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$. При некотором $\alpha > 0$ (по определению конуса возможных направлений) функция $\bar{\mathfrak{x}} + \alpha g$ сублинейна так, что

$$\int\limits_{Z_n} (\bar{\mathfrak{x}} + \alpha g)\, d\mu(\mathfrak{x}) = nV_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) + \alpha \int\limits_{Z_n} g d\mu(\mathfrak{x}) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{Z_n} (\bar{\mathfrak{x}} + \alpha g)\, d\mu(\mathfrak{y}) = nV_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + \alpha \int\limits_{Z_n} g d\mu(\mathfrak{y}).$$

Таким образом, $\mu(\mathfrak{x})(g) \geqslant \mu(\mathfrak{y})(g)$, т. е. $\mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ С другой стороны, элементы $\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}_n$ входят в $\mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$, так что для всякой меры $\mu \in \mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ имеем $\mu \in \mathfrak{B}^*_n$, т. е. $\mu = \mu(\mathfrak{x}) - \mu(\mathfrak{y})$, где $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$. Помимо этого, элемент $-\bar{\mathfrak{x}}$ также входит в $\mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$. Следовательно,

$$0 = \int\limits_{Z_n} \bar{\mathfrak{x}} d\mu = nV_1(\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}) - nV_1(\mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{x}}).$$

Теорема доказана.

3°. **Плоская изопериметрическая задача.** Рассмотрим общую задачу максимизации площади при произвольных линейных ограничениях, т. е. ограничениях на смешанные площади и опорные расстояния искомой (плоской) фигуры.

Задача 3.1. Задан многоугольник $P = \bigcap\limits_{i=1}^{s} \{z \in R^2 : (z, z_i) \leqslant c_i\}$ $(z_i \in Z_2)$ и фигуры $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_m$. Требуется среди фигур $\mathfrak{x}$, лежащих в P и таких, что $V(\mathfrak{y}_j, \mathfrak{x}) \leqslant b_j (j = 1, 2, \ldots, m)$, найти фигуру наибольшей площади.

Прежде всего, условимся рассматривать ограничение $\mathfrak{x} \subset P$, как s ограничений

$$\mathfrak{x}(z_i) = \int\limits_{Z_n} \mathfrak{x} d\varepsilon_{z_i} \leqslant c_i (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_p$ — остов конуса решений системы:

$$\begin{cases} a_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s); \\ \sum_{i=1}^{s} a_i z_i = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

т. е. совокупность крайних лучей конуса (3.1). Рассмотрим меры $\mu_t = \sum_{i=1}^{s} \nu_i^t \varepsilon_{z_i}$. Мера μ_t положительна и инвариантна относительно сдвигов, так что найдется компакт $\mathfrak{r}_t$ такой, что $\mu_t = \mu(\mathfrak{r}_t)$ $(t = 1, 2, \ldots, p)$.

Применим к задаче 3.1 теорему 2.1 и найдем такие неотрицательные числа $\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_{s+m}$, что

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{\nu}_i \varepsilon_{z_i} + \sum_{j=1}^{m} \bar{\nu}_{s+j} \mu(\mathfrak{v}_j) - \mu(\bar{\mathfrak{r}}) \in \mathfrak{B}^*_{2,\bar{\mathfrak{r}}}. \tag{3.2}$$

Из (3.2) немедленно следует, что мера $\sum_{i=1}^{s} \bar{\nu}_i \varepsilon_{z_i}$ инвариантна относительно сдвигов, т. е. вектор $(\bar{\nu}_1, \ldots, \bar{\nu}_s)$ входит в конус (3.1). Следовательно, найдутся числа $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_p \in R_+$ такие, что $\bar{\nu}_i = \sum_{t=1}^{p} \beta_t \nu_i^t$ или

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{\nu}_i \varepsilon_{z_i} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{t=1}^{p} \bar{\beta}_t \nu_i^t \varepsilon_{z_i} = \sum_{t=1}^{p} \bar{\beta}_t \mu(\mathfrak{r}_t).$$

Обозначив символом $\tilde{\mathfrak{r}}$ фигуру

$$\sum_{t=1}^{p} \bar{\beta}_t \mathfrak{r}_t + \sum_{j=1}^{m} \bar{\nu}_{s+j} \mathfrak{v}_j$$

и применив теорему 2.4, получим, что $\tilde{\mathfrak{r}} \geqslant \bar{\mathfrak{r}}$, кроме того, $V(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{r}}) = V(\tilde{\mathfrak{r}}, \bar{\mathfrak{r}})$, т. е. при некотором $c \in R^2$ справедливо соотношение

$$\int_{Z_2} [\tilde{\mathfrak{r}}(z) - \bar{\mathfrak{r}}(z) + (c, z)] \, d\mu(\bar{\mathfrak{r}}) = 0,$$

где подынтегральная функция неотрицательна. Таким образом, $\bar{\mathfrak{r}}(z) = \tilde{\mathfrak{r}}(z) + (c, z)$ для всех $z \in s(\bar{\mathfrak{r}})$ (где $s(\bar{\mathfrak{r}})$ — носитель $\bar{\mathfrak{r}}$, т. е. носитель $\mu(\bar{\mathfrak{r}})$), т. е.

$$\bar{\mathfrak{r}} = \bigcap_{z \in s(\bar{\mathfrak{r}})} \{x \in R^2 : (x, z) \leqslant \bar{\mathfrak{r}}(z)\} =_T \bigcap_{z \in s(\bar{\mathfrak{r}})} \{x \in R^2 : (x, z) \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathfrak{r}}(z)\} \geqslant_T \bigcap_{z \in Z_2} \{x \in R^2 : (x, z) \leqslant \tilde{\mathfrak{r}}(z)\} = \tilde{\mathfrak{r}}.$$

Таким образом, $\bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{\geqslant} \tilde{\mathfrak{x}}$, т. е. $\bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \tilde{\mathfrak{x}}$. Итак, доказана следующая

Теорема 3.1. *Тело $\bar{\mathfrak{x}}$, являющееся решением задачи 3.1, представимо с точностью до переноса в виде*

$$\xi_1\mathfrak{x}_1+\ldots+\xi_p\mathfrak{x}_p+\eta_1\mathfrak{y}_1+\ldots+\eta_m\mathfrak{y}_m.$$

Замечание. Теорема 3.1 показывает, что решение задачи 3.1 сводится к определению коэффициентов $\xi_1,\ldots,\xi_p,\eta_1,\ldots,\eta_m$. Последние, в свою очередь, являются решением некоторой задачи квадратичного программирования, т. е. могут быть найдены за конечное число шагов.

4°. Случай регулярного решения. Из приведенного в предыдущем пункте рассуждеиия ясно, что весьма важен случай, когда $\mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}=\{0\}$, так как в этой ситуации анализ существенно упрощается и сводится, по сути дела, к исследованию решений некоторого уравнения на поверхностные функции. Вообще говоря, гарантировать соотношение $\mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}=\{0\}$ в произвольном случае нельзя. В самом деле, обратимся к следующему элементарному примеру. Возьмем

$$\mathfrak{x}=\{(x_1,x_2)\in R^2:|x_1|+|x_2|\leqslant 1\};$$

$$\mathfrak{y}=\{x_1,x_2)\in R^2:|x_1|\vee|x_2|\leqslant 1\};$$

$$\bar{\mathfrak{x}}=\{x\in\mathfrak{x}:x_2=0\}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{y}\geqslant\mathfrak{x}$. С другой стороны, непосредственным подсчетом проверяется, что $V(\mathfrak{x},\bar{\mathfrak{x}})=V(\mathfrak{y},\bar{\mathfrak{x}})$, так что $\mu(\mathfrak{y})-\mu(\mathfrak{x})\in\mathfrak{B}^*_{2,\bar{\mathfrak{x}}}$.

Если же $\bar{\mathfrak{x}}$ — регулярная фигура, то, как известно (см. приложение II), для любой регулярной фигуры $\mathfrak{z}$ при достаточно малом $\alpha>0$ функция $\bar{\mathfrak{x}}-\alpha\mathfrak{z}$ сублинейна. Таким образом, конус допустимых направлений $\mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ содержит элементы $\mathfrak{B}R_n$ и $-\mathfrak{B}R_n$. Отсюда следует, что для любой меры $\mu\in\mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ и любого $\mathfrak{z}\in\mathfrak{B}R_n$

$$\int\limits_{Z_n}\mathfrak{z}\,d\mu=0. \tag{4.1}$$

Итак, в силу плотности $\mathfrak{B}R_n$ в $\mathfrak{B}_n$ соотношение (4.1) справедливо для всякого $\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_n$ и, следовательно, $\mu=0$. Таким образом, установлена

Теорема 4.1. *Если* $\bar{\mathfrak{x}}$ — *регулярная фигура, то* $\mathfrak{V}^{*}_{n,\bar{\mathfrak{x}}} = \{0\}$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}O_n$. *Если* $\mathfrak{y}$ *T-предшествует* $\mathfrak{x}$ *и для некоторой регулярной поверхности* $\mathfrak{z}$ *выполняется равенство* $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, *то* $\mathfrak{x} \underset{T}{=} \mathfrak{y}$.

Следствие 2. *Пусть выпуклые тела* $\mathfrak{x}$ *и* $\mathfrak{y}$ *не являются T-равными, причем* $\mathfrak{y}$ *можно поместить путем параллельного переноса в* $\mathfrak{x}$. *Для всякой регулярной поверхности* $\mathfrak{z}$ *имеет место строгое неравенство* $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) > V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$.

Проиллюстрируем способ применения этой теоремы.

Пример 4.1 Найти регулярное тело $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{V}R_n$ из условий:

1. $V_m(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) \leqslant c$ $(\mathfrak{x}_1 \in \mathfrak{V}R_n;\ c > 0,\ n > m)$;
2. $V_p(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1)$ достигает максимума $(p \neq m)$.

По теоремам 2.1 и 4.1 найдется $\bar{\alpha} > 0$ такое, что

$$\mu_p(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}_1) = \bar{\alpha}\mu_m(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}_1). \tag{4.2}$$

Положим $\bar{\beta} = \bar{\alpha}^{1/(m-p)}$, тогда из (4.2)

$$\mu_p(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\beta}\mathfrak{x}_1) = \bar{\beta}^p\mu_p(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}_1) = \bar{\beta}^m\mu_m(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}_1) = \mu_m(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\beta}\mathfrak{x}_1).$$

Применяя теорему Александрова — Волкова (см. приложение II), заключаем, что $\bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \bar{\beta}\mathfrak{x}_1$. Коэффициент $\bar{\beta}$ определяется из условия достижения равенства

$$c = V_m(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}_1) = \bar{\beta}^{n-m}V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_1) = \bar{\beta}^{n-m}V(\mathfrak{x}_1).$$

Следовательно, решение поставленной задачи дается формулой

$$\bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \left(\frac{c}{V(\mathfrak{x}_1)}\right)^{\frac{1}{n-m}} \mathfrak{x}_1.$$

Приведенный пример содержит, в частности, изопериметрическую задачу.

Пример 4.2. Найти регулярное тело $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{V}R_n$ из условий:

1. $V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_i) \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$; $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s \in \mathfrak{V}R_n)$;
2. $V(\mathfrak{x})$ достигает максимума.

По теоремам 2.1 и 4.1 найдутся числа $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s \in R_+$ такие, что $\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \sum\limits_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i\mu_1(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}_i) = \mu_1\left(\bar{\mathfrak{x}}, \sum\limits_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i \mathfrak{x}_i\right)$. Стало быть, по теореме Александрова — Волкова

$$\bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \sum_{i=1}^{s} \bar{\alpha}_i \mathfrak{x}_i.$$

Задача сводится к проблеме определения коэффициентов $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s$, т. е., фактически, к некоторой конечномерной задаче математического программирования.

Замечание. Приведенные в этих двух примерах рассуждения не приводят к решению. Точный смысл указанных критериев в том, что регулярных решений, отличных от найденных выше, у рассмотренных задач нет. Таким образом, для завершения исследования нужно установить, что решение должно быть регулярным. Последняя задача является чисто геометрической. В частности, для доказательства регулярности решения изопериметрической задачи достаточно применить, например, технику симметризаций. Смысл приведенных выше условий в том, что для сложных задач они указывают узкую область подозрительных на экстремум фигур.

5°. Выпуклые изопериметрические задачи. С точки зрения математического программирования особый интерес представляет случай, когда рассматриваемые задачи являются выпуклыми.

По теореме Брунна — Минковского поставленная в пункте 1° задача 1.1 является выпуклой в том случае, если ограничения линейны. Итак, рассмотрим для примера следующую задачу.

Задача 5.1. Найти фигуру $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_n$ из условий:

1. $V_1(\mathfrak{y}_j, \mathfrak{x}) \leqslant b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$;
2. $V(\mathfrak{x})$ — достигает максимума.

Теорема 5.1. *Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением поставленной задачи в том и только в том случае, если найдутся обладающие свойством дополняющей нежесткости числа $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m \in R_+$ такие, что выполнены условия:*

$$(1) \quad \mathfrak{x}(\bar{\alpha}) \underset{T}{\geqslant} \bar{\mathfrak{x}};$$

$$(2) \quad V(\bar{\mathfrak{x}}) = V_1(\mathfrak{x}(\bar{\alpha}), \bar{\mathfrak{x}}),$$

где $\mathfrak{x}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}_1\mathfrak{y}_1 \# \bar{\alpha}_2\mathfrak{y}_2 \# \ldots \# \bar{\alpha}_m\mathfrak{y}_m$[1].

[1] Знаком $\#$ обозначается сумма Бляшке (см. приложение II).

Доказательство[1]. Нуждается в проверке лишь достаточность поставленных условий. Для установления достаточности нужно проверить, что функция

$$\varphi(\mathfrak{r}, \alpha) = V^{\frac{n-1}{n}}(\bar{\mathfrak{r}})\, V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{r}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (b_j - V_1(\mathfrak{y}_j, \mathfrak{r}))$$

имеет седловую точку в точке $(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\alpha})$ на множестве $\mathfrak{B}_n \times R^m_+$ ([146, 185]). Условие дополняющей нежесткости означает, что $\sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j (b_j - V_1(\mathfrak{y}_j, \bar{\mathfrak{r}})) = 0$, т. е. $\varphi(\bar{\mathfrak{r}}, \alpha) \geqslant \varphi(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\alpha})$ для всех $\alpha \in R^m_+$. Для проверки неравенства $\varphi(\bar{\mathfrak{r}}, \bar{\alpha}) \geqslant \varphi(\mathfrak{r}, \bar{\alpha})$ для $\mathfrak{r} \in \mathfrak{B}_n$ следует проверить только, что функция $\psi(\cdot) = n\varphi(\cdot, \bar{\alpha})$ достигает максимума на $\mathfrak{B}_n$ в точке $\bar{\mathfrak{r}}$. Функция ψ вогнута, при этом $\psi'_{\bar{\mathfrak{r}}} = \mu(\bar{\mathfrak{r}}) - \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j \mu(\mathfrak{y}_j)$. Так как $-\psi'_{\bar{\mathfrak{r}}} \in \mathfrak{B}^*_{n,\bar{\mathfrak{r}}}$ по условию, то $\psi'_{\bar{\mathfrak{r}}}(g) \leqslant 0$ для всех $g \in \mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{r}}}$. Последнее и означает, что $\psi(\bar{\mathfrak{r}}) \geqslant \psi(\mathfrak{r})$ для всех $\mathfrak{r} \in \mathfrak{B}_n$. Теорема доказана.

Смысл приведенной теоремы заключается в том, что решение экстремальной задачи 5.1 целесообразно начинать с исследования следующей задачи математического программирования:

$$1.\ f_j(\alpha) = V_1(\mathfrak{y}_j, \mathfrak{r}(\alpha)) \leqslant b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m);$$
$$2.\ f_0(\alpha) = V(\mathfrak{r}(\alpha)) \longrightarrow \max.$$

В частности, любое решение $\tilde{\alpha}$ системы $f_j(\alpha) = b_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ порождает решение задачи — поверхность $\mathfrak{r}(\tilde{\alpha})$. Таким образом, решением *задачи Урысона*

$$V_1(\mathfrak{z}_n, \mathfrak{r}) \leqslant c,$$
$$V(\mathfrak{r}) \longrightarrow \max$$

является фигура $\bar{\alpha}\mathfrak{z}_n$, где $\bar{\alpha}$ находится из условия равенства $V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{\mathfrak{r}}) = c$, т. е. $\bar{\alpha} = c / V(\mathfrak{z}_n)$.

---

[1] Более тщательный анализ позволяет снять условие (2), заменив (1) T-равенством $\bar{\mathfrak{r}}$ и $\mathfrak{r}(\bar{\alpha})$.

Приведем еще один пример. Среди фигур, лежащих в некотором симплексе P, где $\mu(P)$, например, есть

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{e_i} + \sqrt{n}\, \varepsilon_{-\frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} e_i},$$

и имеющих заданную интегральную ширину, найти фигуру наибольшего объема. Повторяя рассуждение пункта 3°, видим, что решение имеет вид $\alpha P \# \beta \mathfrak{z}_n$.

6°. Задача Бибербаха. Особенность выпуклых изопериметрических задач в том, что решения подобных задач порождают неравенства вида $\varphi(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\alpha}) \geqslant \varphi(\mathfrak{x}, \bar{\alpha})$ для всех $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_n$, где φ соответствующая функция Лагранжа. Здесь будет рассмотрен способ применения этой особенности на следующей (обобщенной) *задаче Бибербаха*: среди фигур $\mathfrak{x}$ таких, что $d(\mathfrak{x}) \leqslant d(\bar{\mathfrak{x}})$, найти фигуру, максимизирующую объем $V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}$, $\mathfrak{B}$ заданные выпуклые тела. Эта задача поучительна также и в следующем отношении: хотя функционал d не дифференцируем по Гато, техника получения уравнений Эйлера — Лагранжа аналогична развитой выше.

Заметим, что опорное множество сублинейного функционала d есть выпуклая оболочка компакта $\{\varepsilon_z + \varepsilon_{-z} : z \in Z_n\}$. Таким образом (см., например, [50]),

$$d'_{\mathfrak{x}}(g) = \max_{z \in U_{\mathfrak{x}}} [g(z) + g(-z)],$$

где $U_{\mathfrak{x}} = \{z \in Z_n : \mathfrak{x}(z) + \mathfrak{x}(-z) = d(\mathfrak{x})\}$.

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$\varphi(\mathfrak{x}, \alpha) = n V_{m,k}^{\frac{m-k-1}{m-k}}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})\, V_{m,k}^{\frac{1}{m-k}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}) + \\ + \alpha(d(\bar{\mathfrak{x}}) - d(\mathfrak{x})).$$

Положим, как обычно, $\psi(\cdot) = \varphi(\cdot, \bar{\alpha})$. Тогда $\bar{\alpha}$ найдется из условия $\psi'_{\bar{\mathfrak{x}}}(\bar{\mathfrak{x}}) = 0$, а условие ($\psi'_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) \leqslant 0$ для всех $g \in \mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$) приведет к соотношению, эквивалентному условию достижения максимума функцией ψ в точке $\bar{\mathfrak{x}}$. Таким образом, тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением задачи Бибербаха в том и только в том случае, если выполнены эквивалентные условия $\psi'_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) \leqslant 0$ $(g \in \mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}})$ и $\varphi(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\alpha}) \geqslant \varphi(\mathfrak{x}, \bar{\alpha})$

для $\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_n$. В развернутом виде эти условия приводят к следующему утверждению:

Теорема 6.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением задачи Бибербаха;*

(2) *для всякого* $\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_n$ *имеет место неравенство*

$$V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B})\, d^{m-k}(\bar{\mathfrak{x}}) - V_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})\, d^{m-k}(\mathfrak{x}) \leqslant 0;$$

(3) *для всякой функции* g *из конуса допустимых направлений* $\mathfrak{B}_{n,\bar{\mathfrak{x}}}$ *имеет место неравенство*

$$\max_{u\in U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(\bar{\mathfrak{x}}, u) \int_{Z_n} g\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{u\in U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(g, u) \int_{Z_n} \bar{\mathfrak{x}}\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}).$$

Следствие 1. *Пусть тела* $\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, \mathfrak{B}$ *центрально-симметричны и* $\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})\left(Z_n \setminus U_{\bar{\mathfrak{x}}}\right) = 0$, *тогда* $\bar{\mathfrak{x}}$ *решение задачи Бибербаха.*

Доказательство. В этом случае мера $\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})$ — симметрична (т. е. $\mu_{m,k}(e) = \mu_{m,k}(-e)$ для любого борелевского множества $e\subset Z_n$), так что

$$\int_{Z_n} g\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) = \frac{1}{2}\int_{Z_n} b(g, \cdot)\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(g, \cdot)\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\max_{u\in U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(g, u)\cdot \mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})\left(U_{\bar{\mathfrak{x}}}\right).$$

Следовательно,

$$\max_{u\in U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(\bar{\mathfrak{x}}, u)\cdot \int_{Z_n} g\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} d(\bar{\mathfrak{x}}) \max_{u\in U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(g, u)\cdot \mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})\left(U_{\bar{\mathfrak{x}}}\right) =$$
$$= \max_{u\in U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(g, u)\cdot \frac{1}{2}\int_{U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(\bar{\mathfrak{x}}, \cdot)\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) =$$
$$= \max_{u\in U_{\bar{\mathfrak{x}}}} b(g, u)\cdot \int_{Z_n} \bar{\mathfrak{x}}\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}),$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}$, $\mathfrak{B}$ *центрально-симметричные выпуклые поверхности. Для каждой выпуклой поверхности* $\mathfrak{x}$ *имеет место неравенство*

$$V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}) d^{m-k}(\mathfrak{z}_n) - V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{z}_n, \mathfrak{B}) d^{m-k}(\mathfrak{x}) \leqslant 0.$$

7°. Учет ограничений типа включения (случай плоскости). В пункте 2° упоминалось ограничение вида — «искомая фигура лежит в многограннике». При формулировке соответствующей задачи математического программирования это условие было заменено конечным числом линейных ограничений в пространстве выпуклых множеств. Непосредственный перенос этого приема на случай произвольной фигуры приводит к задаче с континуумом ограничений. Удобнее, однако, трактовать подобное ограничение как операторное ограничение из $C(Z_n)$ в $C(Z_n)$. Для упрощения изложения рассмотрим технику получения критериев оптимальности для плоских задач, а в следующем пункте укажем характер (достаточно рутинный) изменения этой техники при переходе в пространства больших размерностей. Помимо этого, в модельных задачах будет рассматриваться, как правило, лишь одно ограничение общего вида, т. е. на смешанный объем, так как случай многих ограничений может быть разобран в соответствии с пунктами 1°—4°.

Задача 7.1 (*Внутренняя изопериметрическая задача*). Среди фигур, лежащих в фиксированном теле $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданный периметр, найти фигуру $\bar{\mathfrak{x}}$ наибольшей площади. Эквивалентная задача программирования ставится следующим образом: найти $\mathfrak{x} \in [\mathfrak{B}_2]$ из условий

$$1.\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{B}_2;$$

$$2.\ \frac{1}{2}\mathfrak{x} \leqslant \frac{1}{2}\mathfrak{x}_0;$$

$$3.\ V(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{x}) \leqslant V(\mathfrak{z}_2, \bar{\mathfrak{x}});$$

4. $\sqrt{V(\bar{\mathfrak{x}})}\sqrt{V(\mathfrak{x})}$ достигает максимума (здесь множитель $\frac{1}{2}$ добавлен для удобства).

В соответствии с общей теорией выпуклого программирования, функция Лагранжа этой задачи определена на множестве $\mathfrak{B}_2 \times R_+ \times C'_+(Z_2)$ (где $C'_+(Z_2) = \{\mu \in C'(Z_2) : \mu \geqslant 0\}$) и имеет вид:

$$\varphi(\mathfrak{x}, \alpha, \mu) = \sqrt{V(\bar{\mathfrak{x}})}\sqrt{V(\mathfrak{x})} + \alpha(V(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{z}_2) - V(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_2)) + \frac{1}{2}\mu(\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}).$$

Конус положительных функций в $C(Z_2)$ телесен, так что для задачи 7.1 справедлива теорема Куна — Таккера ([47, 146]). Условие Слейтера (в случае существования допустимого решения) выполнено. Поэтому $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением этой задачи в том и только в том случае, если найдутся число $\bar{\alpha}$ и мера $\bar{\mu}$ такие, что выполняются условия

(1) $\bar{\mu}(\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}}) \leqslant \mu(\mathfrak{x}_0 - \bar{\mathfrak{x}})$ для всех $\mu \in C'_+(Z_2)$

(условие дополняющей нежесткости);

(2) функция $\psi(\cdot) = 2\varphi(\cdot, \bar{\alpha}, \bar{\mu})$ достигает на $\mathfrak{B}_2$ максимума в точке $\bar{\mathfrak{x}}$.

Заменяя второе условие на дифференциальное, имеем

$$\bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_2) + \bar{\mu} - \mu(\bar{\mathfrak{x}}) \in \mathfrak{B}^*_{2,\bar{\mathfrak{x}}}. \qquad (7.1)$$

Из пункта 3° следует, что $\mu(\bar{\mathfrak{x}}) = \bar{\mu} + \bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_2)$. Так как мера $\bar{\mu}$ неотрицательна и инвариантна относительно сдвигов, то для некоторого компакта $\mathfrak{x}$ имеем $\bar{\mu} = \mu(\mathfrak{x})$. Таким образом, раскрывая условие (7.1), получаем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением внутренней изопериметрической задачи в том и только в том случае, если найдутся критическая фигура $\mathfrak{x}$ и число $\bar{\alpha} \geqslant 0$ такие, что*

(1) $\bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \mathfrak{x} + \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2$;

(2) $\bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z)$ *для всех* $z \in s(\mathfrak{x})$.

Пример 7.1. Пусть $\mathfrak{x}_0$ есть сегмент радиуса R и высоты h. Тогда критическая фигура $\mathfrak{x}$ имеет вид сегмента радиуса $R - \bar{\alpha}$ и высоты $h - \bar{\alpha}$ (рис. 1). Параметр $\bar{\alpha}$ определяется, очевидно, через условие на периметр решения. Заметим, что носитель $\mathfrak{x}$ состоит из векторов, лежащих в угле AOB, и вектора u.

Задача 7.2. (*Внешняя изопериметрическая задача*). Среди фигур, содержащих фиксированную фигуру $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданный периметр, найти фигуру $\bar{\mathfrak{x}}$ наибольшей площади.

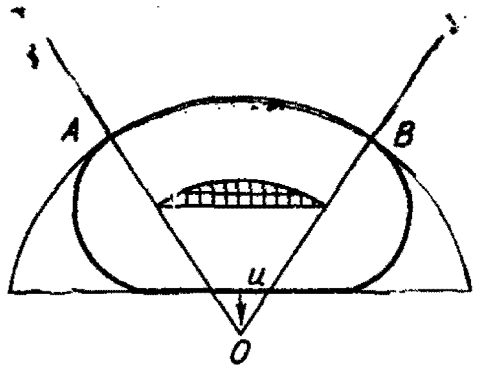

Рис. 1.

Эквивалентная задача математического программирования: найти $\mathfrak{x}\in[\mathfrak{B}_2]$ из условий:

$$1.\ \mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_2;$$

$$2.\ -\frac{1}{2}\,\mathfrak{x}\leqslant-\frac{1}{2}\,\mathfrak{x}_0;$$

$$3.\ V(\mathfrak{x},\mathfrak{z}_2)\leqslant V(\bar{\mathfrak{x}},\mathfrak{z}_2);$$

$$4.\ \sqrt{V(\bar{\mathfrak{x}})}\sqrt{V(\mathfrak{x})}\ \text{достигает максимума.}$$

Аналогично предыдущему случаю приходим к следующей теореме.

Теорема 7.2. *Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ является решением внешней изопериметрической задачи в том и только в том случае, если найдутся критическая фигура $\mathfrak{x}$ и число $\bar{\alpha}\geqslant 0$ такие, что*

$$(1)\quad \bar{\mathfrak{x}}+\mathfrak{x}\underset{T}{\leqslant}\bar{\alpha}\mathfrak{z}_2;$$

$$(2)\quad V(\bar{\mathfrak{x}})+V(\mathfrak{x},\bar{\mathfrak{x}})=\bar{\alpha}V(\bar{\mathfrak{x}},\mathfrak{z}_2);$$

$$(3)\quad \bar{\mathfrak{x}}(z)=\mathfrak{x}_0(z)\ \textit{для всех}\ z\in s(\mathfrak{x}).$$

Пример 7.2. Пусть $\mathfrak{x}_0$ — равносторонний треугольник, тогда вид искомой фигуры $\bar{\mathfrak{x}}$ изображен на рис. 2.

Фигура $\bar{\mathfrak{x}}$ — это $\mathfrak{x}_0$ с «приделанными» сегментами радиуса $\bar{\alpha}$ с центрами O_1, O_2, O_3. Фигура $\mathfrak{x}$ есть дополнение $\bar{\mathfrak{x}}$ до круга радиуса $\bar{\alpha}$, т. е. фигура с поверхностной функцией, равной следу меры Лебега на дополнение носителя $\bar{\mathfrak{x}}$ (на заштрихованную зону на рис. 2).

Задача 7.3. Найти центрально-симметричную фигуру наибольшей площади, содержащуюся в данной фигуре $\mathfrak{x}_0$.

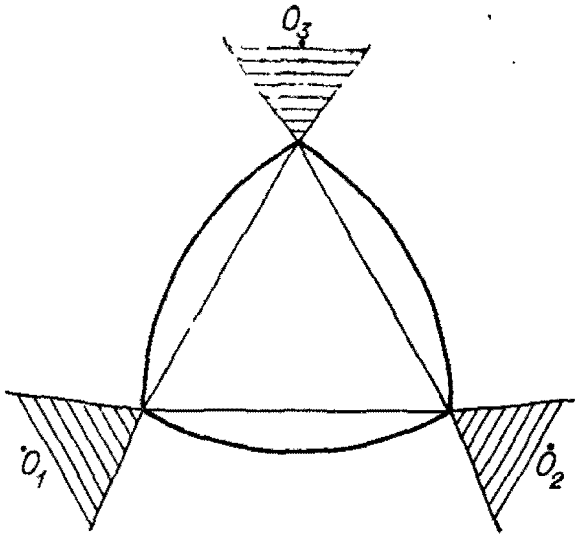

Рис. 2.

Для решения этой задачи следует применить общую технику, развитую выше. Единственная тонкость — описание поляры конуса симметричных фигур.

Предложение 7.1. $V(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) \geqslant (\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *для любой центрально-симметричной выпуклой фигуры* $\mathfrak{z}$ *в том и только в том случае, если симметризация Минковского* $\mathfrak{y}^s$ *T-входит в симметризацию Минковского* $\mathfrak{x}^s$.

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_{Z_2} \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))\, d\mu = \int\limits_{Z_2} f d\mu^s,$$

где $\mu^s(e) = \frac{1}{2}[\mu(e) + \mu(-e)]$ для любого борелевского множества $e \subset Z_2$.

Таким образом, замечая, что $\mu^s(\mathfrak{x}) = \mu(\mathfrak{x}^s)$, получим, что $V(\mathfrak{x}^s, \mathfrak{z}_0) \geqslant V(\mathfrak{y}^s, \mathfrak{z}_0)$ для всякой выпуклой поверхности $\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{B}O_2$. Теперь требуемое непосредственно следует из предложения 2.3.

Учитывая предложение 7.1, получим следующий признак оптимальности.

Теорема 7.3. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением задачи 7.3 в том и только в том случае, если найдется критическая фигура* $\mathfrak{x}$ *такая, что*

$$(1)\ \bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \mathfrak{x}^s;$$

$$(2)\ \bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \text{ для всех } z \in s(\mathfrak{x}).$$

На рис. 3 для случая сегмента указано решение и форма критической фигуры (для удобства заштрихована «половина» критической фигуры — тело $\mathfrak{x}/2$).

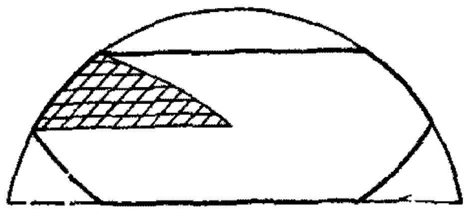

Рис. 3.

Задача 7.4. (Внутренняя изопериметрическая задача в классе центрально-симметрич-

ных фигур). Среди центрально-симметричных фигур, лежащих в данной фигуре $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданный периметр, найти фигуру наибольшей площади.

Критерий оптимальности для этой задачи получается путем комбинации приемов, применяемых при решении задач 7.1 и 7.3.

Теорема 7.4. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением задачи* 7.4 *в том и только в том случае, если найдутся критическая фигура* $\mathfrak{x}$ *и число* $\bar{\alpha}\geqslant 0$ *такие, что*

$$(1)\quad \bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \mathfrak{x}^s + \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2;$$

$$(2)\quad \bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \text{ для всех } z\in s(\mathfrak{x}).$$

Эта теорема показывает, что построение решения такой задачи состоит в сочетании приемов, применяемых для задач 7.1 и 7.2.

Пример 7.3. Пусть $\mathfrak{x}_0$ треугольник. Для решения задачи 7.4 с этим $\mathfrak{x}_0$ следует взять критическую фигуру задачи 7.1 и построить в ней симметричное тело максимальной площади. Критическая фигура для этой задачи имеет вид, указанный на рис. 4.

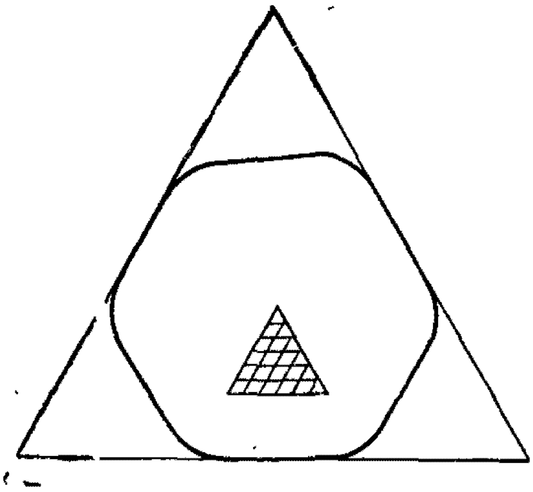

Рис. 4.

Задача 7.5. (*Изопериметрическая задача «с зоной»*). Среди фигур заданного периметра и таких, что $\mathfrak{x}(z)\leqslant \mathfrak{x}_0(z)$ для $z\in S\subset Z_2$, где S некоторый (для удобства) симметричный компакт, найти фигуру наибольшей площади.

В этом случае «зонное» ограничение следует рассматривать, как операторное ограничение из $C(Z_2)$ в $C(S)$. Метод анализа не меняется.

Теорема 7.5. *Допустимое тело* $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением поставленной задачи в том и только в том случае, если найдутся критическая фигура* $\mathfrak{x}$ *и число* $\bar{\alpha}\geqslant 0$ *такие, что*

$$(1)\quad \bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \mathfrak{x} + \bar{\alpha}\mathfrak{z}_2;$$

$$(2)\quad s(\mathfrak{x})\subset S;$$

$$(3)\quad \bar{\mathfrak{x}}(z) = \mathfrak{x}_0(z) \text{ для всех } z\in s(\mathfrak{x}).$$

Пример 7.5. На рис. 5 в качестве $\mathfrak{X}_0$ взят отрезок $[a, b]$, «зона» S заштрихована и зачерчена критическая фигура.

8°. Учет ограничений типа включения (многомерный случай). Из пункта 1° видно, что для общей изопериметрической задачи, т. е. экстремальной задачи, в которой ограничения и целевая функция задаются смешанными объемами, можно, как правило, получить лишь необходимые условия экстремума. Как уже отмечалось, «изопифанная» задача, как принято говорить, «выпукла не в ту сторону», т. е. сводится к задаче максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве. В полной мере методы, изложенные в предыдущем пункте, переносятся на случай выпуклых изопериметрических задач. Таким образом, аналогом внешней изопериметрической задачи, например, будет не внешняя «изопифанная» задача, а внешняя задача Урысона, т. е. задача максимизации объема при заданной интегральной ширине. Напомним, что на плоскости периметр и интегральная ширина суть пропорциональные функционалы.

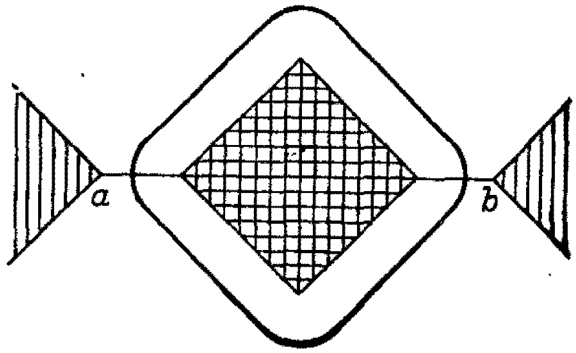

Рис. 5.

Второе отличие плоскости от пространств больших размерностей состоит в том, что лишь на ней совпадают суммы Бляшке и Минковского. При этом, в приведенных выше признаках, как видно, речь идет о функциональных, двойственных условиях, в частности, о суммах Бляшке. Это означает, что при переформулировке плоских критериев оптимальности на случай многомерных пространств суммы Минковского следует заменить суммами Бляшке. Например, при поиске центрально-симметричной фигуры в соответствующем признаке возникает не симметризация Минковского, а симметризация Бляшке.

Третья особенность случая пространств размерности $n>2$ заключается в наличии вырожденных, неотрицательных, инвариантных относительно сдвигов мер, которые следует трактовать как поверхностные функции некоторых выпуклых фигур. Это приводит к тому, что в признаке оптимальности фигурирует, как правило, не критическая фигура, а критическая мера.

И наконец, последнее свойство, которое также было рассмотрено выше, это несводимость отношения T-предшествования к T-вхождению при $n>2$.

Подводя итог, можно сказать, что двойственное исследование многомерных задач поставленного типа содержит, по-существу, лишь одну единую особенность — аппарат опорных функций заменяется аппаратом поверхностных функций.

Пример 8.1. (*Внешняя задача Урысона*). Среди тел, содержащих $\mathfrak{x}_0$ и имеющих заданную интегральную ширину, найти тело $\bar{\mathfrak{x}}$ максимального объема. Для этой задачи критерий оптимальности состоит в следующем.

Допустимое тело $\bar{\mathfrak{x}}$ *является решением внешней задачи Урысона в том и только в том случае, если найдутся критическая неотрицательная мера* μ *и число* $\bar{\alpha}\geqslant 0$ *такие, что*

$$(1)\quad \bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_n)\underset{R^n}{\gg}\mu(\bar{\mathfrak{x}})+\mu;$$

$$(2)\quad V(\bar{\mathfrak{x}})+\frac{1}{n}\int\limits_{Z_n}\bar{\mathfrak{x}}d\mu=\bar{\alpha}V_1(\mathfrak{z}_n,\bar{\mathfrak{x}});$$

$$(3)\quad \bar{\mathfrak{x}}(z)=\mathfrak{x}_0(z)\ \text{для всех}\ z\in s(\mu),$$

(*где* $s(\mu)$ — *носитель меры* μ).

Рассмотрим, например, случай $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{z}_{n-1}$. Искомым телом здесь является некоторая шаровая линза (т. е. пересечение двух шаров одного радиуса), а критической мерой — след поверхностной функции шара радиуса $\bar{\alpha}^{1/(n-1)}$ на дополнение носителя этой линзы. Если $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{z}_1$ и $n=3$, то из полученного представления следует, что решение лежит в классе так называемых веретенообразных поверхностей вращения постоянной кривизны [15].

В заключение отметим, что комбинация приемов, приведенных в последних пунктах, позволяет находить решения широкого класса задач. При этом целесообразно использовать известные приемы геометрии и математического программирования наряду с развитой нами техникой. Проиллюстрируем это последнее положение достаточно типичным примером.

Пример 8.2. При заданных толщине Δ и интегральной ширине выпуклой поверхности максимизировать ее объем. Эта задача по постановке «выпукла не в ту сторону». Однако применение симметризации Минковского показывает, что решение лежит в классе центрально-симметричных фигур (см. пункт 0°). Следовательно, задачу можно переформулировать следующим образом: найти $\mathfrak{r}\in\mathfrak{B}_n$ при условиях:

$$(1)\quad \mathfrak{r}\geqslant\frac{1}{2}\Delta\mathfrak{z}_n;$$

$$(2)\quad \mathfrak{r}(z_0)+\mathfrak{r}(-z_0)\leqslant\Delta \quad (\text{где } z_0 \text{ фиксированный элемент } Z_n);$$

$$(3)\quad V_1(\mathfrak{z}_n, \mathfrak{r})\leqslant V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{\mathfrak{r}});$$

$$(4)\quad V^{\frac{n-1}{n}}(\bar{\mathfrak{r}})\,V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{r}) \text{ достигает максимума.}$$

Для последней задачи, являющейся задачей выпуклого программирования, не выполнено условие Слейтера. Однако развитые выше приемы позволяют получить достаточный признак оптимальности, отличающийся от необходимого лишь в случае, если «безусловная» теорема Куна — Таккера не является «условной».

Допустимое тело $\bar{\mathfrak{r}}$ является решением поставленной задачи, если указаны критическая неотрицательная мера μ и числа $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}\geqslant 0$ такие, что

$$(1)\quad \mu(\bar{\mathfrak{r}})+\mu_{R^n}\ll\bar{\alpha}\mu(\mathfrak{z}_n)+\bar{\beta}(\varepsilon_{z_0}+\varepsilon_{-z_0});$$

$$(2)\quad V(\bar{\mathfrak{r}})+\frac{1}{n}\int_{Z_n}\bar{\mathfrak{r}}\,d\mu=\bar{\alpha}V_1(\mathfrak{z}_n, \bar{\mathfrak{r}})+$$
$$+\frac{1}{n}\bar{\beta}[\bar{\mathfrak{r}}(z_0)+\bar{\mathfrak{r}}(-z_0)];$$

$$(3)\quad \bar{\mathfrak{r}}(z)=\frac{1}{2}\Delta \quad \text{для всех} \quad z\in s(\mu).$$

Таким образом, фигура вида $\bar{\alpha}\mathfrak{z}_n \# \bar{\beta}\mathfrak{z}_{n-1}$, имеющая заданные интегральную ширину и толщину, является решением поставленной задачи. В частности, при $n=3$ решение поставленной задачи следует искать в классе так называемых сырообразных поверхностей вращения постоянной кривизны [15].

9°. Некоторые приложения к линейному программированию. Развитые выше методы позволяют в ряде случаев выделить описываемую конечным числом параметров область фигур, «подозрительных на экстремум». Представляет, в связи с этим, интерес рассмотрение изопериметрической задачи, в которой условие $\mathfrak{r}\in\mathfrak{B}_n$ заменено условием принадлежности искомой фигуры некоторому конечному конусу в пространстве выпуклых множеств. Отметим, что сюда относится, например, плоская изопериметрическая задача. Эта замена становится тем более интересной, что в приложениях встречаются вопросы, сводящиеся при соответствующей интерпретации к задачам такого вида. Ограничимся лишь некоторыми из задач оптимального размещения фигур. Приведем несколько простейших примеров таких задач.

(а) Вписать (слово «вписать» здесь и ниже означает только максимизацию коэффициента растяжения) в многогранник, заданный пересечением полупространств, фигуру, гомотетичную данной.

(б) Найти центр многогранника, т. е. такую его точку, для которой достигается максимум минимального расстояния до граней.

(в) Вписать в многогранник два тела, гомотетичных данным, разделенным гиперплоскостью с заданной нормалью так, чтобы максимизировалась, например, сумма интегральных ширин вписанных тел.

(г) Описать вокруг шара многогранник с гранями, имеющими данные нормали.

Для удобства будем различать два типа задач на размещение. К первому типу отнесем задачи, в которых не фигурируют условия выбора гиперплоскости из семейства параллельных гиперплоскостей (например, задачи (а), (б)); ко второму типу — задачи, в которых присутствуют условия такого рода (задачи (г), (д)).

Отметим, что факт вхождения многогранника P в многогранник Q, заданный пересечением полупространств: $Q = \bigcap\limits_{i=1}^{s} \{x \in R^n : (x, y_i) \leqslant c_i\}$, может быть аналитически записан двумя способами: все вершины многогранника P лежат в Q; опорное расстояние P в направлении y_i не больше c_i ($i = 1, 2, \ldots, s$). Второй способ с вычислительной точки зрения в большинстве случаев представляется более удобным. Это и положено в основу данного пункта.

Примем следующие обозначения:

$$H_c^-(y) = \{x \in R^n : (y, x) \leqslant c\};$$

$$H_c(y) = \{x \in R^n : (y, x) = c\};$$

$$H_c^+(y) = \{x \in R^n : (y, x) \geqslant c\}; \quad (c \in R, \ y \in R^n).$$

Встречающаяся ниже фраза «пусть задана выпуклая фигура $\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_n$» подразумевает существование эффективной процедуры определения значения опорной функции $\mathfrak{x}(y)$ для каждого фиксированного $y\in R^n$. Последняя задача есть задача максимизации линейной формы на выпуклом компакте, т. е. либо является задачей линейного программирования, либо может быть с любой точностью аппроксимирована такой задачей. Напомним некоторые случаи, когда опорная функция вычисляется явно:

(1) опорная функция точки x есть $y\to(y, x)$;

(2) опорная функция шара $\{x:\|x\|_S\leqslant 1\}$ есть (в силу дуализма опорных и калибровочных функций) отображение $y\to\|y\|_{S^\circ}$;

(3) опорная функция внешнего ε-параллельного множества A_ε (по шару S) к множеству A, т. е. множество точек, отстоящих от A в метрике, порожденной S, не далее, чем на $\varepsilon>0$, есть $A_\varepsilon(\cdot)=A(\cdot)+\varepsilon S(\cdot)$.

Фраза «пусть заданы фигуры $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m\in\mathfrak{B}_n$ и линейный по Минковскому функционал g» означает, что известны числа $g(\mathfrak{x}_i)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$. Символом $\mathrm{Co}(\cdot, \ldots, \cdot)$ будем обозначать коническую оболочку перечисленных множеств в пространстве $[\mathfrak{B}_n]$.

Рассмотрим следующую пару экстремальных задач. Заданы: тела $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m\in\mathfrak{B}_n$, векторы $b, y_1, \ldots, y_p\in R^n$, линейный по Минковскому функционал μ.

Задача 9.1. Найти фигуру $\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_n$ из условий:

$$1.\ \mathfrak{x}\in\mathrm{Co}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m);$$

$$2.\ \mathfrak{x}\subset H_{b_j}^-(y_j)\quad (j=1, 2, \ldots, p);$$

$$3.\ \mu(\mathfrak{x})\ \text{достигает максимума.}$$

Задача 9.1а. Найти вектор $z\in R^p$ из условий:

$$1.\ z_j\geqslant 0\ (j=1, 2, \ldots, p);$$

$$2.\ H^+_{\mu(\mathfrak{x}_i)}(y)\cap\mathfrak{x}_i\neq\varnothing\quad (i=1, 2, \ldots, m);\quad y=\sum_{j=1}^{p} z_j y_j;$$

$$3.\ \nu(z)=(b, z)\ \text{достигает максимума.}$$

Замечание. Задача 9.1 является частным случаем полностью линейной изопериметрической задачи (типа 3.1), облегченной условием 1.

Предложение 9.1. *Пара задач* (9.1, 9.1а) *эквивалентна некоторой паре двойственных задач линейного программирования.*

Доказательство. Для простоты будем считать, что элементы $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ линейно независимы как точки пространства $[\mathfrak{V}_n]$. Отождествим каждый вектор $x \in R^m_+$ с той фигурой $\mathfrak{x} \in \mathrm{Co}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m)$, для которой $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{x}_i$. Положим $a_{ij} = \mathfrak{x}_i(y_j)$; $c_i = \mu(\mathfrak{x}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, p)$ и составим пару линейных программ:

A. Найти $x \in R^m$ такой, что	B. Найти $z \in R^p$ такой, что
1. $x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$;	1. $z_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, p)$;
2. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leqslant b_j \ (j = 1, 2, \ldots, p)$;	2. $\sum_{j=1}^{p} a_{ij} z_j \geqslant c_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$;
3. $\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max$.	3. $\nu(z) = \sum_{j=1}^{p} b_j z_j \to \min$.

Заметим, прежде всего, что для любых $\mathfrak{z} \in \mathfrak{V}_n$, $u \in R^n$ и $c \in R$ справедливы соотношения

$$\mathfrak{z} \subset H_c^-(u) \Leftrightarrow \mathfrak{z}(u) \leqslant c;$$

$$\mathfrak{z} \cap H_c^+(u) \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathfrak{z}(u) \geqslant c.$$

Привлекая теорему Минковского — Фенхеля, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{x}_i(y_j) = \mathfrak{x}(y_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} z_j = \sum_{j=1}^{p} z_j \mathfrak{x}_i(y_j) = \mathfrak{x}_i\left(\sum_{j=1}^{p} z_j y_j\right) = \mathfrak{x}_i(y) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, установлены эквивалентности:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leqslant b_j \Leftrightarrow \mathfrak{x} \subset H_{b_j}^-(y_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} y_j \geqslant c_i \Leftrightarrow \mathfrak{x}_i \cap H_{\mu(\mathfrak{x}_i)}^+(y) \neq \varnothing \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Предложение доказано.

Перейдем к задачам второго типа. Пусть $Q = \bigcap_{i=1}^{q} H_{b_i}^-(y_i)$ — многогранник. *Текущим многогранником* Q_u, *порожденным* Q, назовем любой непустой элемент семейства

$$\left\{Q_u = \bigcap_{i=1}^{q} H_{b_i - u_i}^-(y_i)\right\}_{u \in R^q}.$$

Фраза «найти текущий многогранник Q_u» будет означать «определить вектор u».

Поставим пару экстремальных задач, приведенных не в рафинированной, а в удобной для приложения форме.

Заданы фигуры $\mathfrak{x}_i^t \in \mathfrak{B}_n$ ($i=1, 2, \ldots, m(t)$; $t=1, 2, \ldots, s$), векторы $y_j^t \in R^n$ ($j=1, 2, \ldots, p(t)$); $z_k^t \in R^n$ ($k=1, 2, \ldots, l(t)$); $b^t \in R^{p(t)}$; c^t, $d^t \in R^{l(t)}$; $e \in R^s$ ($t=1, 2, \ldots, s$), линейные по Минковскому функционалы g^t ($t=1, 2, \ldots, s$). Положим

$$K^t = \mathrm{Co}\left(\mathfrak{x}_1^t, \ldots, \mathfrak{x}_{m(t)}^t\right);$$

$$V^t = \bigcap_{j=1}^{p(t)} H^-_{b_j^t}\left(y_j^t\right); \quad Q^t = \bigcap_{k=1}^{l(t)} H^-_{c_k^t}\left(z_k^t\right).$$

Задача 9.2. Найти фигуры $\mathfrak{x}^t \in \mathfrak{B}_n$ и текущие многогранники $Q_{u^t}^t$ такие, что

$$1.\ \mathfrak{x}^t \in K^t \quad (t=1, 2, \ldots, s);$$

$$2.\ \mathfrak{x}^t \subset V^t \cap Q_{u^t}^t; \qquad (d^t, u^t) \leqslant e_t\ (t=1, 2, \ldots, s);$$

$$3.\ \mu(\mathfrak{x}^1, \ldots, \mathfrak{x}^s) = \sum_{t=1}^{s} g^t(\mathfrak{x}^t) \text{ достигает максимума.}$$

Задача 9.2а. Найти векторы $\varphi^t \in R^{p(t)}$; $\psi^t \in R^{l(t)}$; $v \in R^s$ ($t=1, 2, \ldots, s$) такие, что

$$1.\ \varphi_j^t \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \ldots, p(t));$$

$$\psi_q^t \geqslant 0 \quad (q=1, 2, \ldots, l(t));$$

$$v_t \geqslant 0 \quad (t=1, 2, \ldots, s);$$

$$2.\ \mathfrak{x}_i^t \cap H^+_{g^t\left(\mathfrak{x}_i^t\right)}\left(\varphi^t + \psi^t\right) \neq \varnothing \quad (i=1, 2, \ldots, m(t));$$

$$\varphi^t = \sum_{j=1}^{p(t)} \varphi_j^t y_j^t; \quad \psi^t = \sum_{q=1}^{l(t)} \psi_q^t z_q^t \quad (t=1, 2, \ldots, s);$$

$$\psi_q^t + v_t d_q^t = 0 \quad (q=1, \ldots, l(t); \quad t=1, 2, \ldots, s);$$

$$3.\ \nu(\varphi^1, \ldots, \varphi^s; \ \psi^1, \ldots, \psi^s; v) = \sum_{t=1}^{s} [(\varphi^t, b^t) + (\psi^t, c^t)] + (e, v) \quad \text{достигает минимума.}$$

Аналогично предложению 9.1 устанавливается

Предложение 9.2. *Пара задач (9.2, 9.2а) эквивалентна некоторой паре двойственных задач линейного программирования.*

Приведем примеры задач, укладывающихся в предложенные схемы.

1. Вписать в многогранник, заданный пересечением полупространств, фигуру, гомотетичную фигуре T. В этом случае в задаче 9.1 $\mathfrak{r}_1=T$; $\mathfrak{r}_{1+j}=e_j$; $\mathfrak{r}_{2+n}=-\sum_{i=1}^{n} e_i$ $(j=1,\ldots,n)$. (Как обычно, $e_1,\ldots,e_n$ — канонический базис R^n.) Максимизируется коэффициент растяжения тела T.

2. С помощью сдвигов расположить фиксированное тело T внутри многогранной поверхности V так, чтобы достигла максимума величина

$$\mu(T_\varepsilon+z)=\min_{x\in V;y\in T_\varepsilon+z}\|y-x\|_S.$$

В этом случае в первой схеме $\mathfrak{r}_1=T$; $\mathfrak{r}_2=S$; $\mathfrak{r}_3=-\sum_{i=1}^{n} e_i$; $\mathfrak{r}_{3+j}=e_j$ $(j=1,\ldots,n)$. Максимизируется коэффициент x_2. Задача нахождения центра многогранника есть, очевидно, частный случай этой задачи при $T=0$.

3. Пусть на плоскости задана решетка размером $m\times p$, образованная двумя семействами прямых, выпуклый многогранник V и выпуклые фигуры A_{ij} $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2,\ldots, p)$. Считаем, что образующие решетку прямые могут перемещаться параллельно себе в пределах, определяемых системой линейных неравенств на величины перемещений. Требуется вписать тело A_{ij} в клетку решетки с номером (i, j), а полученную фигуру при помощи гомотетии расположить в многограннике V так, чтобы минимизировать сумму коэффициентов растяжений. Эта задача точно укладывается во вторую схему (здесь текущими многогранниками являются клетки решетки).

4. Заданы тела $A_1,\ldots,A_m$ и гиперплоскости $H_1,\ldots,H_m$. Требуется найти максимальную гомотетию данного тела такую, чтобы гиперплоскость, параллельная H_i, отделяла от множества A_i образ данного тела при этой гомотетии.

В заключение сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. Наложение линейных ограничений на коэффициенты в представлении $\mathfrak{x}=\sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{x}_i$ не меняет линейно-программного характера задач 9.1 и 9.2.

Замечание 2. Двойственные задачи 9.1а, 9.2а показывают, что условие пересечения тела с заданным полупространством (возможно, текущим) сводится к линейному неравенству. Следовательно, в приведенные задачи можно вводить требование касаиия вписанного тела фиксированных граней многогранника и аналогичные условия.

Замечание 3. Условие принадлежности искомого тела конусу позволяет в ряде случаев упростить вычисление опорных функций. Так, в задаче вписывания цилиндра с основанием T и заданным направлением образующей можно положить $\mathfrak{x}_1=T$ и в качестве $\mathfrak{x}_2$ взять некоторый отрезок образующей.

Замечание 4. Существует обширный набор задач, которые аппроксимируются задачами приведенных типов.

Замечание 5. Линейно-программный характер приведенных задач не изменится при добавлении любых ограничений вида $g(\mathfrak{x})\leqslant c$, где $g\in C'(Z_n)$, $c\in R$.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этом приложении приводятся определения и формулировки результатов из теории упорядоченных пространств, используемые в этой книге. Детальное изложение в [41, 56, 77].

1°. Структуры и булевы алгебры. Рассмотрим упорядоченное множество X. Пусть Y — непустое подмножество X. Элемент x называется *супремумом* (верхней гранью, точной верхней границей) множества Y, если (1) $x \geqslant y$ для любого $y \in Y$; (2) если $z \geqslant y$ для любого $y \in Y$, то $z \geqslant x$. Двойственным образом определяется инфимум множества Y.

Множество X называется *структурой* (решеткой), если любые два элемента $x, y \in X$ имеют супремум $x \vee y$ и инфимум $x \wedge y$. Структура называется *полной* (соответственно, условно полной), если любое (соответственно, любое ограниченное) непустое множество Y имеет супремум $\sup Y$ и инфимум $\inf Y$. Если в данных определениях ограничиться требованием существования только супремума, то получившиеся объекты называются соответственно верхней полуструктурой, верхней полной полуструктурой и верхней условно полной полуструктурой. Двойственным образом определяется нижняя (полная, условно полная) полуструктура. Заметим, что полная структура имеет наибольший и наименьший элементы.

Пусть X — дистрибутивная структура, имеющая наибольший элемент $+\infty$ и наименьший элемент $-\infty$. Эта структура называется *булевой алгеброй*, если каждый элемент $x \in X$ имеет дополнение $x' \in X$. (Последнее означает, что $x \vee x' = +\infty$, $x \wedge x' = -\infty$.) Булева алгебра называется полной, если она является полной структурой.

В теории булевых алгебр важную роль играет теорема Стоуна о представлении булевой алгебры с помощью совокупности открыто-замкнутых (т. е. одновременно открытых и замкнутых) подмножеств некоторого вполне несвязного компакта. Напомним, что топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если его открыто-замкнутые подмножества образуют базис окрестностей.

Теорема Стоуна. *Всякая булева алгебра A изоморфна упорядоченной по включению совокупности открыто-замкнутых подмножеств некоторого вполне несвязного компакта Q.*

Компакт Q, о котором идет речь в теореме, называется стоуновским компактом алгебры A.

Булева алгебра полна в том и только в том случае, если ее стоуновский компакт Q *экстремален* (т. е. замыкание каждого открытого в Q множества открыто).

2°. **K-линеалы и K-пространства.** Множество X (содержащее более одного элемента) называется *K-линеалом* (векторной решеткой), если оно является одновременно векторным пространством и структурой, причем алгебраические операции и отношение порядка согласованы между собой следующим образом:

(а) если $x \geqslant y$, то $x+z \geqslant y+z$ для любого $z \in X$;

(б) если $x \geqslant y$, то $\lambda x \geqslant \lambda y$ для любого положительного λ.

Пространство, в котором введено отношение порядка, удовлетворяющее (а) и (б) (и не являющееся, вообще говоря, структурой), называется (полу)*упорядоченным векторным пространством*. Таким образом, каждый K-линеал является упорядоченным векторным пространством. Множество $K=\{x \in X : x \geqslant 0\}$, где X — упорядоченное пространство, является конусом, причем $K \cap (-K)=\{0\}$. Такие конусы называются *выступающими*. Если в векторном пространстве X указан выступающий конус K, то X можно рассматривать как упорядоченное векторное пространство, считая, что $x \geqslant y$, если $x-y \in K$; при этом сам конус K совпадает с множеством положительных элементов этого пространства. Если конус K не является выступающим, то отношение $\geqslant$, им индуцируемое, является лишь отношением предпорядка (т. е. из неравенств $x \geqslant y$ и $y \geqslant x$, вообще говоря, не следует, что $x=y$).

В K-линеале X справедлива следующая

Лемма о двойном разбиении. *Пусть x — положительный элемент и, с одной стороны, $x=y+z$,* *где* $y, z \geqslant 0$, *а, с другой,* $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, *где все* $x_i \geqslant 0$. *Каждый элемент* x_i *можно представить в виде* $x_i = y_i + z_i$, *где* $y_i, z_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и, кроме того,* $y = y_1 + \ldots + y_n$; $z = z_1 + \ldots + z_n$.

K-линеал называется *K-пространством,* если он является условно полной структурой. Примером K-пространства может служить пространство $B(Q)$ всех ограниченных функций, определенных на множестве Q. (Считаем, что отношение порядка и алгебраические операции в $B(Q)$ введены естественным образом.) Если Q — компакт, то пространство $C(Q)$ всех непрерывных на Q функций является K-линеалом. Для того, чтобы $C(Q)$ было K-пространством, необходимым и достаточным условием является экстремальность компакта Q. Если пространство X, упорядоченное конусом K, является K-линеалом (соответственно, K-пространством), то конус K называется *миниэдральным* (соответственно, вполне миниэдральным).

K-линеал называется *архимедовым,* если в нем выполнен принцип Архимеда: для любого $x > 0$ (эта запись означает, что $x \geqslant 0$ и $x \neq 0$) множество $\{nx : n = 1, 2, \ldots\}$ неограничено. Каждый архимедов K-линеал можно дополнить до K-пространства. Точнее говоря, имеет место следующая

Теорема. *Для каждого архимедова K-линеала X существует K-пространство $\hat{X}$, обладающее следующими свойствами:*

(1) *существует алгебраическое и порядковое вложение (инъекция)* $\varphi : X \to \hat{X}$, *причем* φ *сохраняет грани (если какое-то множество U в X имело супремум, то* $\varphi(\sup U) = \sup \varphi(U)$);

(2) *для каждого* $x \in \hat{X}$ *выполняется*

$$x = \sup\{y \in \varphi(X) : y \leqslant x\} = \inf\{z \in \varphi(X) : z \geqslant x\}.$$

Пространство $\hat{X}$, фигурирующее в этой теореме, называется *K-пополнением* K-линеала X. Из свойства (2) вытекает, что K-пополнение определяется однозначно (с точностью до алгебраического и порядкового изоморфизма).

Рассмотрим K-линеал X. Для $x \in X$ положим $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x^+ + x^-$. Элементы x^+, x^- и $|x|$ называются соответственно *положительной частью,* *отрицательной частью* и *модулем* элемента x. Заметим, что $x=x^+-x^-$.

Векторное подпространство H в K-линеале X называется *нормальным подпространством* X, если из условий $x\in H$, $x\geqslant 0$, $|y|\leqslant x$ следует, что $y\in H$. Можно показать, что нормальные подпространства K-пространства суть также K-пространства.

3°. Сходимость в K-линеалах. В K-линеале X можно ввести различными способами сходимость, порождаемую порядком. Рассмотрим три вида сходимости.

(1). *(o)-сходимость*. Говорят, что последовательность (x_n) элементов из X (o)-сходится к элементу x, если найдутся последовательности (y_n) и (z_n) такие, что (y_n) возрастает (т. е. $y_{n+1}\geqslant y_n$), (z_n) убывает (т. е. $z_n\geqslant z_{n+1}$) и, кроме того,

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n;\ \sup y_n=\inf z_n=x.$$

Если X является K-пространством, то удобно ввести в рассмотрение *верхний и нижний пределы*. Для любой последовательности (x_n) положим

$$\varliminf_n x_n=\sup_k \inf_{m\geqslant k} x_m;\quad \varlimsup_n x_n=\inf_k \sup_{m\geqslant k} x_m.$$

Последовательность (x_n) (o)-сходится к x в том и только в том случае, если $\varlimsup\limits_n x_n=\varliminf\limits_n x_n=x$. (Данное выше определение (o)-сходимости имеет смысл в любой структуре, а нижний и верхний пределы можно ввести в любой полной структуре.) Заметим, что в K-линеале (o)-предел перестановочен с алгебраическими и структурными операциями.

(2). *(*)-сходимость*. Последовательность (x_n) (*)-сходится к элементу x, если из любой подпоследовательности (x_{n_i}) можно выделить последовательность $(x_{n_{i_k}})$ такую, что (o) $-\lim\limits_k x_{n_{i_k}}=x$. Легко проверить, что (*)-сходимость слабее (o)-сходимости; обратное, вообще говоря, неверно.

(3). *(r)-сходимость*. Последовательность (x_n) (r)-сходится к элементу x, если существует элемент $y\geqslant 0$, обладающий следующим свойством: по любому $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что $|x_n-x|\leqslant\varepsilon y$ как только $n\geqslant N$. При этом элемент y называют *регулятором сходи-*

мости. Если K-линеал X архимедов, то из (r)-сходимости следует (o)-сходимость.

4°. Нормированные структуры. K-линеал и одновременно нормированное пространство X называют *KN-линеалом* (нормированной решеткой), если норма в X монотонна (т. е. из неравенства $|x|\leqslant|y|$ следует, что $\|x\|\leqslant\|y\|$). Если, кроме того, пространство X полно, то оно называется KB-линеалом (банаховой решеткой). Отметим, что KN-линеал архимедов.

KN-линеал X называется *KB-пространством,* если (1) X есть K-пространство; (2) для каждой убывающей последовательности (x_n) такой, что $\inf x_n=0$, выполняется соотношение $\|x_n\|\to 0$; (3) если последовательность (x_n) возрастает и неограничена (по порядку), то $\|x_n\|\to+\infty$.

Можно показать, что KB-пространство полно (т. е. является KB-линеалом). Кроме того, в KB-пространстве сходимость по норме совпадает со $(*)$-сходимостью.

Примерами KB-пространств могут служить пространства L^p $(1\leqslant p<+\infty)$ всех функций (точнее, классов эквивалентных функций), определенных на некотором пространстве с мерой и суммируемых с p-той степенью.

5°. K-линеалы ограниченных элементов. Положительный элемент K-линеала X называется *единицей* и обозначается $\mathbf{1}$, если $x\wedge\mathbf{1}>0$ для любого $x>0$. Единица имеется не во всяком K-линеале. Если же она существует, то определяется не единственным образом. Элемент x называется *ограниченным* (по отношению к единице $\mathbf{1}$), если найдется такое число μ, что $|x|\leqslant\mu\mathbf{1}$. K-линеал X с единицей $\mathbf{1}$ называется *K-линеалом ограниченных элементов*, если каждый его элемент ограничен. Свойство быть K-линеалом ограниченных элементов не зависит от выбора такой единицы.

В архимедовом K-линеале ограниченных элементов X с единицей $\mathbf{1}$ вводят стандартным образом норму, полагая для $x\in X$

$$\|x\|=\inf\{\lambda : |x|\leqslant\lambda\mathbf{1}\}.$$

Если $\tilde{\mathbf{1}}$ и $\tilde{\tilde{\mathbf{1}}}$ разные единицы в X, то соответствующие им нормы эквивалентны. Введенная норма обращает X в KN-линеал, который называется *KN-линеалом ограниченных элементов.*

В KN-линеале ограниченных элементов сходимость по норме совпадает с (r)-сходимостью, а ограниченность множества по норме эквивалентна его ограниченности по упорядочению. Если $x, y \in X$, $x, y \geqslant 0$, то $\|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|$.

Теорема Крейнов—Какутани. *Для всякого KN-линеала X ограниченных элементов существует такой компакт Q, что X алгебраически и порядково изоморфен и изометричен некоторой плотной подструктуре пространства $C(Q)$, плотной в $C(Q)$. При этом компакт Q определяется единственным (с точностью до гомеоморфизма) образом.*

6°. База K-пространства. Пусть X — некоторый K-линеал с единицей $\mathbf{1}$. Элемент $e \in X$ называется *единичным*, если $e \wedge (\mathbf{1} - e) = 0$. Совокупность $U(X)$ всех единичных элементов называется *базой* X. Нетрудно проверить, что относительно порядка, индуцированного из X, база $U(X)$ является булевой алгеброй, причем эта алгебра полна, если X есть K-пространство.

Можно показать, что для всякой булевой алгебры существует архимедов K-линеал ограниченных элементов, база которого изоморфна этой алгебре. Если X и Y — это два K-пространства ограниченных элементов, имеющие изоморфные базы, то и сами эти пространства изоморфны.

7°. Операторы со значениями в K-пространстве. Пусть V — векторное пространство, Y — некоторое K-пространство. Имеет место

Теорема Хана—Банаха—Канторовича. *Пусть $q: V \to Y$ супераддитивный $(q(x+y) \geqslant q(x) + q(y))$ и положительно однородный $(q(\lambda x) = \lambda q(x), \lambda > 0)$ оператор*[1] *и оператор T_1 со значениями в Y определен на векторном подпространстве V_1 пространства V, аддитивен, однороден и удовлетворяет неравенству $T_1 x \geqslant q(x)$ $(x \in V_1)$. Тогда найдется аддитивный и однородный оператор $T: V \to Y$, совпадающий на V_1 с T_1 и такой, что $Tx \geqslant q(x)$ для всех $x \in V$.*

Доказательство этой теоремы в существенном совпадает с доказательством теоремы Хана—Банаха.

В дальнейшем под оператором будем понимать аддитивный и однородный оператор.

Пусть V — нормированное пространство. Говорят, что оператор $T: V \to Y$ имеет абстрактную норму, если образ $T(S)$ единичного шара S ограничен, при этом элемент

[1] Такие операторы часто называют *суперлинейными*.

$|T|=\sup\{|Tx|:x\in S\}$ называется *абстрактной нормой* оператора T. Можно показать, что оператор с абстрактной нормой (bo)-линеен, т. е. из соотношения $\|x_n-x\|\to 0$ следует, что $Tx_n\xrightarrow{(o)}Tx$. Для широкого класса пространств (так называемых K^+-пространств (см. [41])) верно и обратное утверждение.

Пусть X и Y суть K-линеалы. Оператор $T:X\to Y$ называется *положительным*, если $Tx\geqslant 0$ для $x\geqslant 0$; оператор T, представимый в виде разности двух положительных, называется *регулярным*. Если K-линеалы X и Y архимедовы, то регулярный оператор (r)-непрерывен (т. е. из соотношения $x_n\xrightarrow{(r)}x$ следует, что $Tx_n\xrightarrow{(r)}Ty$).

Если Y является K-пространством, то множество всех регулярных операторов $T:X\to Y$, упорядоченное естественным образом, также является K-пространством. При этом для регулярного оператора T справедливы соотношения (при $x\geqslant 0$)

$$T^+x=\sup_{0\leqslant x'\leqslant x} Tx';$$

$$T^-x=-\inf_{0\leqslant x'\leqslant x} Tx';$$

$$|T|x=\sup_{\substack{x_1+x_2=x\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0}}(Tx_1-Tx_2).$$

Отметим, что любой оператор T с абстрактной нормой регулярен, его модуль $|T|$ также имеет абстрактную норму и $\|T\|=|T|$.

Пусть X и Y суть KN-линеалы. Тогда для положительного ограниченного (по норме) оператора $T:X\to Y$ имеем

$$\|T\|=\sup_{x\geqslant 0,\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|.$$

В заключение приведем теорему о распространении положительного аддитивного оператора с мажорирующего множества. Подмножество Z в K-линеале X называется *мажорирующим*, если для любого $x\in X$ найдется $z\in Z$ такой, что $|x|\leqslant z$. Имеет место

Теорема Канторовича. *Положительный аддитивный оператор, заданный на мажорирующем векторном подпространстве K-линеала X и со значениями в K-пространстве Y, может быть распространен на весь X с сохранением положительности и аддитивности.*

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Здесь приводятся используемые в основном тексте сведения из геометрии выпуклых поверхностей. Детальное изложение в [20, 25, 34, 164, 182].

1°. Простейшие определения и факты. Пусть $\mathfrak{V}_n$ совокупность выпуклых компактных множеств n-мерного числового пространства R^n. Элементы множества $\mathfrak{V}_n$ называются *выпуклыми фигурами*. Символом $\mathfrak{V}O_n$ обозначается множество телесных выпуклых компактов. При этом для элементов $\mathfrak{V}O_n$ как синонимы используются слова *«выпуклые тела»* или *«выпуклые поверхности»*. Символом $\mathfrak{V}R_n$ обозначается множество строго выпуклых и гладких выпуклых поверхностей. Элементы $\mathfrak{V}R_n$ называются *регулярными телами* (или поверхностями). *Суммой Минковского* выпуклых фигур $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ называют фигуру

$$\mathfrak{x}+\mathfrak{y}=\{z\in R^n : z=x+y \quad (x\in\mathfrak{x},\ y\in\mathfrak{y})\}.$$

Символом $\alpha\mathfrak{x}$, где $\alpha\geqslant 0$, обозначастся множество

$$\{z\in R^n : z=\alpha x \quad (x\in\mathfrak{x})\}.$$

Символом $\mathfrak{z}_n$ обозначается *евклидов шар* $\{z\in R^n : |z|\leqslant 1\}$, здесь $|z|=\left(z_1^2+\ldots+z_n^2\right)^{1/2}$ — *евклидова длина* вектора. Символом Z_n обозначается сфера $\{z\in R^n : |z|=1\}$. Множество Z_n называют также *сферой направлений*, а его элементы — *направлениями*. Пусть e_i $(i=1, 2\ldots, n)$ орты $e_i=(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots,0)$, рассматриваемые как элементы $\mathfrak{V}_n$. Символом $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение. *Опорная функция* выпуклой фигуры $\mathfrak{x}$ есть отображение $y\to\max\{(x, y) : x\in\mathfrak{x}\}$. Для обозначения этого отображения, а также его следа на Z_n используется символ $\mathfrak{x}$. Отметим, что опорная функция фигуры имеет простой геометрический смысл. Именно, $\mathfrak{x}(u)$ (где $u \in Z_n$) есть (ориентированное) расстояние опорной плоскости с внешней нормалью u до начала координат.

Справедливо соотношение

$$\mathfrak{x} = \bigcap_{y \in R^n} \{z \in R^n : (z, y) \leqslant \mathfrak{x}(y)\}. \qquad (1.1)$$

Выпуклая фигура $\mathfrak{x}$ называется *центрально-симметричной* (с центром в c), если $\mathfrak{x}(u) = \mathfrak{x}(-u) + (c, u)$ для всех $u \in R^n$.

Симметризацией Минковского $\mathfrak{x}^s$ фигуры $\mathfrak{x}$ называется множество, построенное по (1.1) для функции $u \to [\mathfrak{x}(u) + \mathfrak{x}(-u)]/2$.

Величина $b(\mathfrak{x}, u) = \mathfrak{x}(u) + \mathfrak{x}(-u)$ называется *шириной* фигуры $\mathfrak{x}$ *в направлении* $u \in Z_n$. Величины

$$d(\mathfrak{x}) = \max_{u \in Z_n} b(\mathfrak{x}, u),$$

$$\Delta(\mathfrak{x}) = \min_{u \in Z_n} b(\mathfrak{x}, u)$$

называются соответственно *диаметром* и *толщиной* фигуры $\mathfrak{x}$. Отображения $d: x \to d(\mathfrak{x})$ и $\Delta: \mathfrak{x} \to \Delta(\mathfrak{x})$ являются, очевидно, положительно однородными и соответственно суб (супер) аддитивными относительно сложения Минковского.

Расстоянием (*метрикой*) *Бляшке* называют функцию $\rho: \mathfrak{V}_n \times \mathfrak{V}_n \to R$, определенную соотношением

$$\rho(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \inf\{t > 0 : \mathfrak{x} \subset \mathfrak{y} + t\mathfrak{z}_n;\ \mathfrak{y} \subset \mathfrak{x} + t\mathfrak{z}_n\}.$$

Топологию, наводимую ρ в $\mathfrak{V}_n$, называют *топологией Хаусдорфа*. Если $\mathfrak{x}$ есть предел последовательности по этой топологии, то (иногда) говорят, что $\mathfrak{x}$ есть замкнутый предел Хаусдорфа этой последовательности.

Многогранником (точнее, ограниченным выпуклым многогранником) называют выпуклую оболочку конечного числа точек (при $n=2$ употребляют термин *многоугольник*).

Теорема аппроксимации многогранниками. (а) *Каждая выпуклая фигура есть предельная точка множества содержащихся в ней многогранников.* (б) *Каждая выпуклая фигура есть предельная точка множества содержащих ее многогранников.*

Запись $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$ ($\mathfrak{y}$ *Т-входит* в $\mathfrak{x}$) означает, что $\mathfrak{y}$ размещается в $\mathfrak{x}$ параллельным переносом, т. е. существует вектор $c \in R^n$ такой, что $\mathfrak{x} \supset \mathfrak{y}+c$. Если $\mathfrak{x} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}$ и $\mathfrak{y} \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{x}$, то говорят, что $\mathfrak{x} \underset{T}{=} \mathfrak{y}$ ($\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ совпадают с точностью до параллельного переноса).

Если $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ регулярные тела, то при достаточно малом $\alpha>0$ найдется фигура $\mathfrak{z}$ такая, что $\mathfrak{z}+\alpha\mathfrak{y}=\mathfrak{x}$.

Отметим еще два факта. $\mathfrak{B}R_n$ плотно в топологии Хаусдорфа в $\mathfrak{B}O_n$ и $\mathfrak{B}O_n$, в свою очередь, плотно в $\mathfrak{B}_n$.

2°. **Смешанные объемы и смешанные поверхностные функции.** Пусть $\mathfrak{x}$ многоугольник, ненулевое ребро которого с единичной внешней нормалью n_i имеет длину l_i ($i=1,\ldots, s$). Поверхностной функцией $\mathfrak{x}$ называется мера $\mu(\mathfrak{x}) = \sum\limits_{i=1}^{s} l_i \varepsilon_{n_i}$. Если $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ — многоугольники, то смешанной площадью $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ называют величину $V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{1}{2}\int\limits_{Z_2} \mathfrak{y}(\cdot)\, d\mu(\mathfrak{x})$. Ясно, что если $\mathfrak{x}' \underset{T}{=} \mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}' \underset{T}{=} \mathfrak{y}$, то $V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = V(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$. Пусть теперь $n=3$ и $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ — произвольные многогранники. Смешанной поверхностной функцией $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ называют дискретную меру (Радона) $\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in C'(Z_3)$, определенную следующим способом:

$$\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i V(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i)\, \varepsilon_{n_i},$$

где

$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x} \cap \{z \in R^3 : (z, n_i) = \mathfrak{x}(n_i)\};$$
$$\mathfrak{y}_i = \mathfrak{y} \cap \{z \in R^3 : (z, n_i) = \mathfrak{y}(n_i)\},$$

а суммирование ведется по тем нормалям n_i, для которых $V(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i) > 0$ (можно показать, что множество таких нормалей конечно). Для трех многогранников их смешанный объем определится соотношением

$$V(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \frac{1}{3}\int\limits_{Z_3} \mathfrak{z}\, d\mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Продолжая этот процесс по индукции, в R^n каждым $n-1$ (не обязательно различным) многогранникам сопоставим меру $\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) \in C'(Z_n)$, называемую их смешанной поверхностной функцией и обладающую тем свойством, что

$$\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}) = \sum_i V\left(\mathfrak{x}_1^i, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}^i\right) \varepsilon_{n_i},$$

где

$$\mathfrak{x}_k^i = \mathfrak{x}_k \cap \{z \in R^n : (z, n_i) = \mathfrak{x}_k(n_i)\}.$$

Суммирование ведется по (конечному) множеству тех нормалей, для которых $V(\mathfrak{x}_1^i, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}^i) > 0$. Смешанный объем n многогранников определяется соотношением

$$V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{x}_n) = \frac{1}{n} \cdot \int_{Z_n} \mathfrak{x}_n(\cdot)\, d\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}).$$

Пусть $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$ — произвольные выпуклые фигуры в R^n. Можно показать, что для любых последовательностей многогранников $(\mathfrak{x}_i^k)$, аппроксимирующих $\mathfrak{x}_i$, существует, не зависящий от способа аппроксимации или от порядка перехода к пределу, широкий (т. е. в слабой топологии) предел смешанных поверхностей функций многогранников $\mathfrak{x}_i^k, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}^k$. Этот предел называется *смешанной поверхностной функцией* фигур $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$. Величина

$$V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{x}_n) = \frac{1}{n} \int_{Z_n} \mathfrak{x}_n(\cdot)\, d\mu(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1})$$

называется *смешанным объемом* фигур $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$.

Смешанный объем обладает следующими свойствами:

(1) *симметричность*, т. е. для любой перестановки $\{i_1, \ldots, i_n\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$ и любых фигур $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$

$$V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = V(\mathfrak{x}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{x}_{i_n});$$

(2) *полилинейность* по Минковскому, т. е.

$$V(\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n) = \alpha V(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n) + \beta V(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n);$$

(3) *непрерывность* (в топологии Хаусдорфа) по каждой переменной;

(4) $V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \geqslant 0$; при этом $V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) > 0$ в том и только в том случае, если можно найти невырождающиеся в точки отрезки $A_i \subset \mathfrak{x}_i$, которые не параллельны одной и той же гиперплоскости (Отсюда, в частности, следует, что если $\mathfrak{x}'_k \underset{T}{=} \mathfrak{x}_k$ $(k=1, \ldots, n)$, то $V(\mathfrak{x}'_1, \ldots, \mathfrak{x}'_n) = V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$. Последнее свойство называется *инвариантностью относительно сдвигов*);

(5) *монотонность*; если $\mathfrak{x}_k \underset{T}{\geqslant} \mathfrak{y}_k$ $(k=1, \ldots, n)$, то

$$V(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) \geqslant V(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n).$$

Поверхностной функцией $\mathfrak{x}$ называется мера $\mu(\mathfrak{x}) = \mu(\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x})$.

Можно показать, что *объем* $V(\mathfrak{x})$ (n-мерная лебегова мера $\mathfrak{x}$) равен $V(\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x})$, аналогично, *площадь поверхности* $S(\mathfrak{x})$ есть $nV(\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x}, \mathfrak{z}_n)$. При $n=2$ величины $V(\mathfrak{x})$ и $S(\mathfrak{x})$ называют соответственно *площадью* и *периметром* фигуры $\mathfrak{x}$. Для смешанных поверхностных функций и объемов приняты обозначения ($0 \leqslant m, k \leqslant n$; $m > k$):

$$V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}) = V(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, \underbrace{\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x}}_{m-k}, \underbrace{\mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}}_{k});$$

$$\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}) = \mu(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, \underbrace{\mathfrak{x}, \ldots, \mathfrak{x}}_{m-k-1}, \underbrace{\mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}}_{k});$$

$$V_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = V(\underbrace{\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}}_{n-m}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B});$$

$$\mu_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mu(\underbrace{\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}}_{n-m-1}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}).$$

Таким образом,

$$V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}) = \frac{1}{n} \int\limits_{Z_n} \mathfrak{x}\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}).$$

Известно, что функция $V(\cdot, \ldots, \cdot)$ допускает распространение с сохранением непрерывности и полилинейности на пространство $[C(Z_n)]^n$. Смешанными объемами задаются многие важные характеристики выпуклых фигур. Приведем некоторые из них. Пусть R^p — произвольное подпространство R^n ($p=1, 2, \ldots, n$); p-мерный объем ортогональной проекции фигуры $\mathfrak{x}$ на R^p называется *p-мерной поперечной мерой*, при этом ее численное значение дается формулой $V_{n-p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_{n-p})$ (здесь $\mathfrak{z}_{n-p}$ — единичный шар в ортогональном дополнении R^p). Величина $V_{n-p}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_n)$ называется *интегралом поперечной меры* (или средней поперечной мерой). В частности, величина $V_1(\mathfrak{z}_n, \mathfrak{x}) = V_{n-1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}_n)$ называется *интегральной шириной* (или нормой) выпуклой фигуры.

Приведем еще одну простую полезную формулу

$$V(\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \alpha^{n-m} \beta^m \cdot V_m(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

3°. **Теорема Александрова.** Мера $\mu \in C'(Z_n)$ называется *александровской*, если

(1) $\mu \geqslant 0$;

(2) μ *инвариантна относительно сдвигов*, т. е.

$$\int\limits_{Z_n} e_i d\mu = 0 \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, n$$

(напомним, что e_i есть функция $z \to (z, e_i)$);

(3) μ *не вырождена*, т. е. для всякого гиперподпространства $H \subset R^n$ имеет место соотношение $\mu(Z_n \cap H) < \mu(Z_n)$.

Теорема Александрова. *Поверхностная функция выпуклого тела есть александровская мера. Для всякой александровской меры найдется единственное с точностью до переноса выпуклое тело, имеющее эту меру своей поверхностной функцией.*

Отметим, что на плоскости вырожденной положительной инвариантной относительно сдвигов мере отвечает поверхностная функция отрезка.

Носитель $s(\mathfrak{x})$ поверхностной функции выпуклого тела $\mathfrak{x}$ называется *носителем фигуры* $\mathfrak{x}$. При этом

$$\mathfrak{x} \underset{T}{=} \bigcap_{z \in s(\mathfrak{x})} \{y \in R^n : (z, y) \leqslant \mathfrak{x}(z)\}.$$

Поверхностная функция симметричной фигуры $\mathfrak{x}$ *симметрична*, т. е. $\mu(\mathfrak{x})(e) = \mu(\mathfrak{x})(-e)$ для любого борелевского множества e. *Симметризацией Бляшке* фигуры $\mathfrak{x}$ называется фигура с поверхностной функцией $e \to \frac{1}{2}[\mu(\mathfrak{x})(e) + \mu(\mathfrak{x})(-e)]$. Пусть $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ — выпуклые поверхности, *суммой Бляшке* $\mathfrak{x} \# \mathfrak{y}$ называется однозначно определенная (с точностью до сдвига) фигура с поверхностной функцией $\mu(\mathfrak{x}) + \mu(\mathfrak{y})$.

Смешанная поверхностная функция полилинейна. Таким образом, на плоскости с точностью до переноса суммы Бляшке и Минковского совпадают.

Существует ряд теорем об определенности поверхности ее поверхностными функциями. Нам потребуется лишь один из таких результатов.

Теорема Александрова — Волкова [3]. *Пусть* $\bar{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{y}$ — *регулярные поверхности, причем* $\mu_p(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y}) = \mu_m(\bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{y})$ $(p \neq m)$. *Тогда* $\bar{\mathfrak{x}} \underset{T}{=} \mathfrak{y}$.

4°. **Теорема Брунна — Минковского.** В приложениях к экстремальным задачам фундаментальную роль играет следующая

Теорема Брунна — Минковского. *Функционал* $G_{m,k}\colon \mathfrak{x} \to V_{m,k}^{1/(m-k)}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B})$ *положительно однороден и супераддитивен (относительно сложения Минковского).*

В дальнейшем нас будет интересовать производная функции $G_{m,k}$ по допустимым направлениям (говорят, что функция $g \in C(Z_n)$ является *допустимым направлением* в точке $\bar{\mathfrak{x}} \in \mathfrak{B}_n$, если найдется такая фигура $\mathfrak{y}$, что функция $\bar{\mathfrak{x}} + \alpha g$ $(\alpha > 0)$ является опорной функцией $\mathfrak{y}$).

Прежде всего, заметим, что в силу симметричности и полилинейности смешанного объема справедливо отношение

$$V_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}} + \alpha g, \mathfrak{B}) = V_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}) + \\ + \alpha(m-k) V(g, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, \\ \underbrace{\bar{\mathfrak{x}}, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}}_{m-k-1}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}) + o(\alpha),$$

где $o(\alpha)/\alpha \to 0$ при $\alpha \downarrow 0$.

Следовательно,

$$(V_{m,k})'_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} (V_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}} + \alpha g, \mathfrak{B}) - V_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}))/\alpha = \\ = (m-k) V(g, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, \\ \underbrace{\bar{\mathfrak{x}}, \ldots, \bar{\mathfrak{x}}}_{m-k-1}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}) = \frac{m-k}{n} \int_{Z_n} g\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B}).$$

Отсюда видно, что если $G_{m,k}(\bar{\mathfrak{x}}) \neq 0$, то

$$(G_{m,k})'_{\bar{\mathfrak{x}}}(g) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\int_{Z_n} g\, d\mu_{m,k}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})}{V_{m,k}^{\frac{m-k-1}{m-k}}(\mathfrak{A}, \bar{\mathfrak{x}}, \mathfrak{B})}.$$

По теореме Брунна—Минковского, $(G_{m,k})'_{\bar{\mathfrak{x}}}(\mathfrak{y}) \geqslant G_{m,k}(\mathfrak{y})$. В развернутой форме это означает, что для любых фигур $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}$ из $\mathfrak{B}_n$ справедливо неравенство

$$V_{m,k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{x}, \mathfrak{B}) V_{m,k}^{m-k-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{y}, \mathfrak{B}) \leqslant \\ \leqslant V^{m-k}(\mathfrak{x}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{n-m}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{y}, \underbrace{\mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}}_{k}).$$

Последнее неравенство называют *неравенством Александрова.*

КОММЕНТАРИИ

К Введению. Основные факты теории выпуклых функций см. в монографии Рокфеллера [141]. Там же собрана достаточная библиография. Из других работ отметим монографии Харди — Литтлвуда — Полиа [166] и Красносельского и Рутицкого [92], а также обзор [8] ранних работ по теории выпуклых функций.

Схема пунктов 1°, 2° восходит к Минковскому и Фенхелю [125, 160]. Окончательная форма этой конструкции содержится, фактически, у Хермандера [167].

Специфическое свойство квадратичных трехчленов (эквивалентное генерированию) отмечено Боманом [19] и Коровкиным [87].

К главе I. О различных обобщениях понятия выпуклости см. обзоры в [9, 49]. Конструкция H-выпуклости, естественно, не нова. Схема пункта 1° типична в теории упорядоченных алгебраических систем (см. [31, 163]). H-выпуклость в конкретных ситуациях встречалась в ряде работ. Отметим только [46, 52, 53, 54, 61, 72, 165]. Особенный интерес представляют работа Фаня [156] и работы Бобока и Корнеа [16, 17, 18], где предложен родственный подход к непрерывным H-выпуклым функциям.

R^n_+-устойчивые множества систематически используются, например, в теории роста целых функций [39, 40, 119, 142]. Общие свойства устойчивых множеств в локально выпуклом пространстве (л. в. п.) исследованы Рубиновым [144]. R^n_+ -нормальные множества возникли в основном в связи с потребностями математической экономики [122]. Теория таких множеств в л. в. п. и их связь с распространениями сублинейных функционалов изучены Рубиновым [144]. По поводу выпуклости на невыпуклом множестве и геометрических приложений этого понятия см. [26, 27, 28].

Большой цикл исследований по теории выпуклых множеств выполнен Кли ([84], а также более поздние работы, ссылки на основные из которых приведены, например, в [154]).

Конструкция пространства выпуклых множеств восходит еще к Нейману и Биркгофу [163]. Одной из первых работ, где существенно используется это пространство, следует считать цикл Александрова [2]. Наше изложение следует Пинскеру [131]; см. также работы [45, 66, 79, 134, 135, 161, 167, 168, 182]. Пространство выпуклых множеств подробно изучалось в серии работ Рабиновича [132, 133, 134]. Это пространство находит интересные внегеометрические приложения, относительно этого см., в частности, [122].

О схеме Фенхеля — Моро и ее связях с проблемами других математических дисциплин см. монографию Рокфеллера [141] и обзорную статью Иоффе и Тихомирова [71]. Существенными для развития этой теории явились, в частности, работы [24, 39, 128, 139, 140, 160, 161]. О связях с экстремальными задачами существует обширная литература. Отметим только [1, 69, 71, 138], обзорную статью [147], где излагается перекликающийся с данным изложением подход, а также содержащую обширную библиографию книгу [154].

Глава I в основном следует работам авторов [107, 108]. Результаты пункта 8° принадлежат Линке.

К главе II. Понятие декомпозиции (для случая сублинейных функций) было введено Решетняком [137]. Люмис [116] дал абстрактное определение декомпозиции. О понятии декомпозиции в полулинейных пространствах см. [55]. Окончательный результат для выпуклых функций получен Картье, Феллом, Мейе [80]. Теорема о поляре для сублинейных функций получена Кутателадзе [96]. Доказательство теоремы декомпозиции следует этой работе. О слабо измеримых распространениях и тематике, приведшей к теореме Харди — Литтлвуда — Полиа — Блэкуэлла — Штейна — Шермана — Картье, см. [14, 80, 159, 166]. Теорема Штрассена и близкая задача о субдифференциале интеграла выпуклых функций представлены в [47, 181]. Изложение окончательных результатов в этом направлении имеется у Иоффе и Левина [70].

О теории Шоке см. [159, 177, 178], а также обширную литературу, связанную, главным образом, с так называемыми геометрическими симплексами (см. [17, 18, 21, 183, 186, 187], где приведена достаточная библиография, и статьи [38, 123]). Принцип сохранения неравенств восходит к известной работе Кейдисона [81]; в дальнейшем он использован, фактически, в [16, 17, 18, 183], где введена родственная конструкция выпуклости. «Теорема Макободского» есть аналог теоремы Макободского для выпуклых функций (см. [159]; впрочем, там использован, в известном смысле, двойственный подход). По поводу границ (Мильмана) Шоке и Шилова см., например, [124, 159]. «Теорема Шоке» есть аналог известного результата Шоке для выпуклых метрических компактов [177]. «Теорема Фаня» относится к теореме Фаня [156] так же, как теорема Шоке относится к теореме Крейна — Мильмана. Задача о сохранении неравенства представляет интерес, главным образом, в связи с теорией генераторов.

Пункты 1°, 2° следуют в основном работам авторов [107, 108]. Дальнейшие новые результаты принадлежат, главным образом, Кутateладзе [99, 103, 104].

К главе III. Теоремы о генераторах следует рассматривать как новые способы задания выпуклых функций, так как эти теоремы носят локальный характер. Глобальный же характер изложения объясняется тем, что именно в такой форме вопросу о сходимости операторов и функционалов (без привлечения понятия генераторов) посвящена достаточно обширная литература (подробный обзор в [42]).

Первые содержательные результаты, относящиеся к указанной теме, получены Коровкиным [87]. Общие признаки подпространств в $C(Q)$, обеспечивающие сходимость на всем пространстве при условии сходимости только на самом этом подпространстве, получены Шашкиным в терминах границы Шоке (см. [169, 171, 172]). Там же обнаружены различные интересные связи топологического характера. Связь с супремальным порождением (в пространстве $C([a, b])$) впервые, по-видимому, замечена Баскаковым [6]. Сходимости в пространствах L^p посвящена работа [51]. Новый подход к теоремам Коровкина предложили Климов, Красносельский и Лифшиц [85] и Красносельский и Лифшиц [90, 91] (примыкают к этим работам статьи [36, 113]). В [90] отмечена и связь со сходимостью нерастягивающих операторов. Первые серьезные результаты в последнем направлении получены Шашкиным [173] и Рублевым [148]. О порядковой надстройке см., например, [56, 91, 105].

Общая теория супремальных генераторов развита авторами, в частности, в [102, 105, 109, 110, 145]. Результаты совместных работ по генераторам в пространствах непрерывных функций принадлежат в большей мере Кутателадзе; а по «абстрактным» генераторам принадлежат в большей мере Рубинову. Результаты пункта 4° и теорема 6.3 принадлежат Рутковскому [149].

Теорема 8.2 принадлежит Шмульяну [175, 176], показавшему, что сформулированный в ней критерий сходимости равносилен сильной дифференцируемости сопряженной нормы (в соответствующей точке), аналогичный результат о слабой сходимости равносилен слабой дифференцируемости. Дальнейшие эквивалентные условия сходимости, типа приведенных в теореме 8.2, см. в известной работе Фаня и Гликсберга [157]. Родственные эффекты, нашедшие важные приложения в теории приближений и математическом программировании, имеют место в банаховых пространствах, обладающих свойством Ефимова— Стечкина (по этому поводу см. [63, 65, 179]). О дифференцируемости норм и выпуклых функций см. также [4, 5, 48, 58, 94].

Ряд родственных вопросов, не нашедших отражения в настоящей главе, изложен, например, в [23, 35, 89, 112, 126, 129, 150, 151, 162].

По поводу техники квазилинеаризации см. [10, 73, 74, 86]. Понятие квазиквадратизации введено в [111], см. также [93]. Задача Дирихле для выпуклых функций рассмотрена, например, в [118].

К главе IV [1]. По поводу экстремальных задач выпуклой геометрии см. обзоры Боннезена и Фенхеля [20] и Буземана [25], а также книгу Хадвигера [164] и цикл статей Александрова [2].

Общая схема рассмотрения задач изопериметрического типа как задач программирования в пространстве выпуклых множеств принадлежит Кутателадзе и Рубинову [106]. Дальнейшие результаты в этом направлении принадлежат Кутателадзе [97, 100, 101].

По поводу задачи Бибербаха см. [11, 98]; о задаче Урысона см. [155], а также обзор Люстерника [117].

О задачах оптимального размещения фигур существует обширная литература. Все нужные детали (и многое сверх того) можно обнаружить в монографии Канторовича и Залгаллера [78].

[1] Ввиду классического характера этой тематики и, следовательно, необозримости литературы, мы сочли возможным ограничиться необходимым минимумом замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.— Л., ГИТТЛ, 1948, 386 с.
2. **Александров А. Д.** К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV.— «Матем. сб.», 1938, т. 3 (45), № 2, с. 227—251.
3. **Александров А. Д., Волков Ю. А.** Теоремы единственности для поверхностей «в целом».— «Вестн. ЛГУ», 1958, т. 7, с. 14—26.
4. **Асплунд Э. (Asplund E).** Frechet differentiability of convex functions.— "Acta Math.", 1968, v. 121, № 1—2, p. 31—48.
5. **Асплунд Э., Рокфеллер Р. (Asplund E., Rockafellar R.).** Gradients of convex functions.— "Trans. Amer. Math. Soc.", 1969, v. 139, p. 443—467.
6. **Баскаков В. А.** О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов.— «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, № 1, с. 131—134.
7. **Бауэр Г. (Bauer H.).** Silovsher rand and Dirichletsches problem.— "Ann. Inst. Fourier", 1961, v. 11, p. 89—136.
8. **Беккенбах Э. (Beckenbach E.).** Convex functions.— "Bull. Amer. Math. Soc.", 1948, v. 54, p. 439—460.
9. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М., «Мир», 1965, 276 с.
10. **Беллман Р., Калаба Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968, 183 с.
11. **Бибербах Л. (Bieberbach L.).** Uber eine extremaleigenschaft des kreises.— "Iber. dtsch. math.— ver.", 1915, v. 24, p. 247—250.
12. **Биркгоф Г.** Теория структур. М., ИЛ, 1952, 407 с.
13. **Бишоп Е., де Лю К. (Bishop E., de Leew K.).** The representation of linear functionals by measures on sels of extreme points.— "Ann. Inst. Fourier", 1959, v. 9, p. 305—331.
14. **Блекуэлл Д. (Blackwell D.).** Equivalent comparisons of experiments.— "Ann. Math. Statistics", 1953, v. 24, № 1, p. 265—272.
15. **Бляшке В.** Круг и шар. М., «Наука», 1967, 232 с.
16. **Бобок Н. (Boboc N.).** Cone convexe de fonctions continuous sur un espace compact.— "Rev. roumaine math. pures et appl.", 1969, v. 14, № 7, p. 937—948.
17. **Бобок Н., Корнеа А. (Boboc N., Cornea A.).** Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces.—"Rev. roumaine math. pures et appl.", 1967, v. 12, № 4, p .471—525.

18. **Бобок Н., Корнеа А. (Boboc N., Cornea A.).** Cones convexes ordonnes.— "C. R. Acad. Sci. Paris", 1970, v. 270, № 9, p. A55—A59.
19. **Боман Г. (Bohman H.).** On approximation of continuous and analytic functions.— "Arkiv for Mat.", 1952, v. 2, № 3, p. 43—56.
20. **Боннезен Т., Фенхель В. (Bonnesen T., Fenchel W.).** Theorie der konvexen Körper. Berlin, Springer, 1934, 164 p.
21. **Бонсал Ф. (Bonsall F.).** On the representation of points of a convex set.— "J. London Math. Soc.", 1963, v. 38, № 3, p. 332—334.
22. **Брело М.** Основы классической теории потенциала. М., «Мир», 1964, 212 с.
23. **Бродский М. Л.** Об одном необходимом и достаточном признаке систем функций, для которых выполняется теорема П. П. Коровкина.— В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М., ГИФМЛ, 1961, с. 318—323.
24. **Брондстед А. (Brondsted A.).** Conjugate convex functions in topological vector spaces.— "Mat. Fys. Medd. Dansk. Vid. Selsk." 1964, v. 34, № 2, p. 1—26.
25. **Буземан Г.** Выпуклые поверхности. М., «Наука», 1964, 238 с.
26. **Буземан Г. (Busemann H.).** Convexity on Grassman manifolds.— "Enseign. Math.", 1961, v. 7, p. 139—152.
27. **Буземан Г., Ивалд Г., Шефард Дж. (Busemann H., Ewald G., Shephard G.).** Convex bolies and convexity on Grassman cones.— "Math. Ann.", 1963, v. 151, № 1, p. 1—41.
28. **Буземан Г., Шефард Дж. (Busemann H., Shephard G.).** Convexity on nonconvex sets.— In: Convexity. Proceedings of Symposia Pure Mathematics. Copenhagen, 1967, p. 20—33.
29. **Букар Дж. (Bucur G.).** Fonctions simplement concaves sur un espace simplicial.— "Rev. roumaine math. pures et appl.", 1970, v. 15, № 6, p. 783—808.
30. **Бурбаки Н.** Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959, 410 с.
31. **Бурбаки Н.** Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М., «Наука», 1965, 300 с.
32. **Бурбаки Н.** Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., «Наука», 1967, 396 с.
33. **Бурбаки Н.** Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М., «Наука», 1967, 392 с
34. **Валентайн Ф. (Valentine F.).** Convex sets. N. Y., McGraw-Hill, 1964.
35. **Васильев Р. К.** Сходящиеся последовательности линейных операторов в полуупорядоченных пространствах.— «Матем. заметки», 1970, т. 8, № 4, с. 475—486.
36. **Васильев Р. К.** О сходимости линейных положительных операторов и сингулярных интегралов в некоторых полуупорядоченных пространствах.— «Изв. вузов. Математика», 1970, № 6, с. 35—45.
37. **Векслер А. И.** О банаховой и дедекиндовой полноте пространств непрерывных функций, векторных структур и максимальных колец.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 196, № 1, с. 20—23.

38. **Винсент-Смит Дж. (Vincent-Smith G.).** An extension of Caratheodory theorem to infinite dimensions using Choquet boundary theory.— "Quart. J. Math.", 1971, v. 22, № 86, p. 231—238.
39. **Владимиров В. С.** Преобразование Лежандра выпуклых функций.— «Матем. заметки», 1967, т. 1, № 6, с. 675—682.
40. **Владимиров В. С.** Выпуклые однородные функций — индикатрисы роста голоморфных функций.— «Матем. заметки», 1967, т. 2, № 2, с. 167—174.
41. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., ГИФМЛ, 1961, 407 с.
42. **Гаркави Л. А.** Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах.— В кн.: Математический анализ (1967). Итоги науки. М., ВИНИТИ АН СССР, 1969, с. 75—132.
43. **Гельдер О. (Holder O.).** Ueber einen mittelwersatz.— "Gottingen Nachrichten", 1889, p. 38—47.
44. **Глазман И. М., Любич Ю. И.** Конечномерный линейный анализ в задачах. М., «Наука», 1969, 475 с.
45. **Годет-Тоби К., Фам Тхе Лай М. (Godet-Tobie K., Pham The Lai M.).** Sur le plongement de l'ensembles de convexes, formes, bornes d'une espace vectoriel lokalement convexe.— "C. R. Acad. Sci. Paris", 1970, v. 271, № 2, p. A84—A87.
46. **Гольдштейн В. М.** Некоторые теоремы о полунепрерывности и сходимости с функционалом.— «Сиб. матем. ж.», 1971, т. 12, № 1, с. 84—98.
47. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М., «Наука», 1971, 351 с.
48. **Даифорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962, 895 с.
49. **Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.** Теорема Хелли. М., «Мир», 1968, 159 с.
50. **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., изд. ЛГУ, 1968, 178 с.
51. **Дзядык В. К.** О приближении функций положительными линейными операторами и сингулярными интегралами.— «Матем. сб.», 1966, т. 70, № 4, с. 508—517.
52. **Дик Е. (Deak E.).** Eine verallgemeinerung des begriffs des linearen raumes und der Konvexitat.— "Studia Sci. Math. Hung." 1966, v. 1, № 3—4, p. 45—59.
53. **Дик Е. (Deak E.).** Extremalpunks begriffs fur richtungs-raume.— "Acta Math. Acad. Sci. Hung.", 1967, v. 18, № 1—2, p. 113—131.
54. **Дик Е. (Deak E.).** Topologische richtungraumes — eine verallgemeinerung des begriffs des lokalconvexen raumes mit der schwachen topologie.— "Studia Sci. Math. Hung.", 1966, v. 1, № 3—4, p. 297—308.
55. **Дииджес Г. (Dinges H.).** Decompositions in ordered semigroups.— "J. Funct. Anal.", 1970, v. 5, № 3, p. 436—484.
56. **Джеймсон Г. (Jameson G.).** Ordered linear spaces. Berlin — New-York, Springer, 1970.

57. **Джерисон М. (Jerison M.).** Certain spaces of continuous fundious — "Trans. Amer. Math. Soc.", 1951, v. 70, p. 103—133.

58. **Джилс Дж. (Giles J.).** On a characterisation of differentiability of the norm of a normed linear space.— "J. Austral. Math. Soc.", 1971, v. 12, p. 106—114.

59. **Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений.— «Докл. АН СССР», 1963, т. 149, № 4, с. 759—762.

60. **Дынкин Е. Б.** Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963, 859 с.

61. **Дэвис Е. (Davis E.).** A generalized theory of convexity.— "Proc. London Math. Soc.", 1967, v. 17, № 4, p. 644—652.

62. **Дэй М.** Нормированные линейные пространства. М., ИЛ, 1961, 232 с.

63. **Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.** Аппроксимативная компактность и чебышевские множества.— «Докл. АН СССР», 1961, т. 140, № 3, с. 522—524.

64. **Залгаллер В. А., Решетняк Ю. Г.** О спрямляемых кривых, аддитивных вектор-функциях и смешении отрезков.— «Вестн. ЛГУ», 1954, № 2, с. 45—67.

65. **Зингер И. (Singer I.).** Some remarks on approximative compactness.— "Rev. roumaine math. pures et appl.", 1964, v. 9, № 2, p. 167—177.

66. **Ивалд Г., Шефард Дж. (Ewald G., Shephard G.)** Normed vector spaces consisting of classes of convex sets.— "Math. Z.", 1966, v. 91, № 1, p. 1—19.

67. **Иенсен И. (Jensen J.).** On konvexe functioner of uligheder mellem middelvaerdier.— "Nyt. Tidsskr. Math.", 1905, v. 16, p. 49—69.

68. **Иосида К.** Функциональный анализ. М., «Мир», 1967, 624 с.

69. **Иоффе А. Д.** Теория двойственности и математическое программирование.— В кн.: Тр. II зимней школы по математ. программированию и смежным вопросам. М., 1969.

70. **Иоффе А. Д., Левин В. Л.** Субдифференциалы выпуклых функций.— «Тр. Москов. матем. об-ва», 1972, т. 26, с. 3—72.

71. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи.— «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, № 6, с. 51—116.

72. **Иуэн А. (Ewen A.).** Generalized convexity and sets of extremal points.— "J. London Math. Soc.", 1970, v. 2, № 7, p. 395—402.

73. **Калаба Р. (Kalaba R.).** On nonlinear differential equations, the maximum operation and monotone convergence.— "J. Math. Mech.", 1959, v. 8, № 4, p. 395—574.

74. **Канторович Л. Ф.** Функциональный анализ и прикладная математика.— «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, № 6, с. 89—185.

75. **Канторович Л. В.** Методы оптимизации и математические модели экономики.— «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 5, с. 107—109.

76. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959, 684 с.

77. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пискнер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.— Л., ГИТТЛ, 1950, 548 с.

78. **Канторович Л. В., Залгаллер В. А.** Рациональный раскрой промышленных материалов. Изд. 2. Новосибирск, «Наука», 1971, 299 с.

79. **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964, 839 с.

80. **Картье П., Фелл Дж., Мейе П. (Cartier P., Fell J., Meyer P.).** Comparaison des measures portees par un ensemble convexe compact.— "Bull. Soc. Math. France.", 1964, v. 92, p. 435—445.

81. **Кейдисон Р. (Kadison R.).** A representation theory for commutative topological algebras.— "Memoirs Amer. Math. Soc.", 1951, v. 7, 39 p.

82. **Келдыш М. В.** О задаче Дирихле.— «Докл. АН СССР», 1941, т. 32, № 5, с. 308—309.

83. **Келли Дж.** Общая топология. М., «Наука», 1968, 383 с.

84. **Кли В. (Klee V.).** Convex sets in linear spaces.—"Duke Math. J.", 1951, v. 13, p. 433—466.

85. **Климов В. С., Красносельский М. А., Лифшиц Е. А.** Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов.— «Тр. Москов. матем. об-ва», 1966, т. 15, с. 55—69.

86. **Коллатц Л.** Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969, 447 с.

87. **Коровкин П. П.** О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций.— «Докл. АН СССР», 1953, т. 90, № 6, с. 961—964.

88. **Коровкин П. П.** Линейные операторы и теория приближений. М., Физматгиз, 1959, 211 с.

89. **Коровкин П. П.** Сходящиеся последовательности линейных операторов.— «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, № 4, с. 147—152.

90. **Красносельский М. А., Лифшиц Е. А.** К вопросу о сходимости последовательностей положительных операторов в линейных топологических пространствах.— «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, № 2, с. 213—214.

91. **Красносельский М. А., Лифшиц Е. А.** Принцип сходимости последовательностей положительных линейных операторов.— "Studia math.", 1968, т. 31, № 5, с. 435—468.

92. **Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М., ГИФМЛ, 1958, 271 с.

93. **Кружков С. Н.** О минимаксном представлении решений нелинейных уравнений первого рода.— «Функц. анализ и его приложения», 1969, т. 3, № 2, с. 57—66.

94. **Кудиа Д. (Cudia D.).** The geometry of Banach spaces. Smoothness.— "Trans. Amer. Math. Soc.", 1969, v. 110, № 2, c. 284—314.

95. **Куратовский К.** Топология. Т. I. М., «Мир», 1966, 594 с.

96. **Кутателадзе С. С.** Положительные линейные в смысле Минковского функционалы над выпуклыми поверхностями.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 192, № 5, с. 984—986.

97. **Кутателадзе С. С.** Смежные вопросы геометрии и математического программирования. Автореф. канд. дисс. Новосибирск, 1970.
98. **Кутателадзе С. С.** О неравенстве Бибербаха.— «Сиб. матем. ж.», 1970, т. 11, № 6, с. 1403—1405.
99. **Кутателадзе С. С.** Пример на декомпозицию.— «Оптим. планир.», 1970, вып. 17, с. 145—148.
100. **Кутателадзе С. С.** Общее решение плоской изопериметрической задачи.— «Оптим. планир.», 1970, вып. 17, с. 149—152.
101. **Кутателадзе С. С.** Ограничения типа включения в задачах изопериметрического типа.— «Оптимизация», 1971, вып. 3(20), с. 103—110.
102. **Кутателадзе С. С.** О сходимости к мере Дирака и к тождественному оператору.— «Сиб. матем. ж.», 1972, т. 13, № 2, с. 464—466.
103. **Кутателадзе С. С.** Об операциях над шарами Минковского.— «Оптимизация», 1971, вып. 3(20), с. 111—119.
104. **Кутателадзе С. С.** Слабая H-выпуклость.— «Оптимизация», 1971, вып. 4(21), с. 21—27.
105. **Кутателадзе С. С.** Некоторые теоремы о сходимости операторов.— «Докл. АН СССР», 1973, т. 208, № 4, с. 771—774.
106. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел.— «Оптим. планир.», 1969, вып. 14, с. 61—79.
107. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** К теории структурной двойственности функций и множеств.— «Оптим. планир.», 1970, вып. 17, с. 96—144.
108. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Некоторые классы H-выпуклых функций и множеств.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 6, с. 1261—1263.
109. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Супремальные генераторы.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 199, № 4, с. 776—777.
110. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Супремальные генераторы и сходимость последовательностей операторов.— «Оптимизация», 1971, вып. 3(20), с. 120—153.
111. **Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.** Об одном способе представления решений дифференциальных уравнений.— «Дифференц. уравн.», 1972, т. 8, № 4, с. 731—733.
112. **Лабскер Л. Г.** О некоторых достаточных условиях аппроксимации непрерывных функций операторами класса S_m.— «Докл. АН АзССР», 1970, т. 26, № 9, с. 3—7.
113. **Лабскер Л. Г.** О слабой сходимости последовательностей линейных положительных функционалов.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 197, № 6, с. 1264—1267.
114. **Ландкоф Н. С.** Основы современной теории потенциала. М., «Наука», 1966, 515 с.
115. **Линденштраус Дж. (Lindenstrauss J.).** Extension of compact operators.— "Memoirs Amer. Math. Soc.", 1964, v. 48, p. 1—112.
116. **Люмис Л. (Loomis L.).** Unique direct integral decompositions on convex sets.—"Amer. Math. J.", 1962, v. 84, № 3, p. 509—526.

117. **Люстерник Л. А.** Применение неравенства Брунна — Минковского к экстремальным задачам.— «Успехи матем. наук», 1936, т. 2, с. 47—54.
118. **Майергоиз Л. С.** Одна краевая задача для выпуклых функций и ее приложение к исследованию асимптотики функций.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 4, с. 762—765.
119. **Майергоиз Л. С.** Об асимптотике выпуклых функций многих переменных .— «Оптимизация», 1971, вып. 1 (18), с. 67—81.
120. **Майерс Ф. (Myers F.)** Normed linear spaces of continuous functions.—"Bull. Amer. Math. Soc.", 1950, v. 56, № 3, p. 233—241.
121. **Майкл Э. (Michael E.).** Continuous selections.—"Ann. Math.", 1956, v. 63, № 2, p. 361—382.
122. **Макаров В. Л., Рубинов А. М.** Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики.— «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 5, с. 125—160.
123. **Макдональд Дж. (McDonald J.).** Maximal measures and abstract Dirichlet problems.—"Quart. J. Math.", 1971, v. 22, №86, p. 239—246.
124. **Мильман Д. П.** Характеристика экстремальных точек регулярно-выпуклого множества.— «Докл. АН СССР», 1947, т. 57, № 2, с. 119—122.
125. **Минковский Г. (Minkowski H.).** Geometrie der Zahlen. Leipzig, Teubner, 1910.
126. **Минькова Р. М., Шашкин Ю. А.** О сходимости линейных операторов класса S_m.— «Матем. заметки», 1969, т. 6, № 5, с. 591—598.
127. **Митягин Б. С.** Интерполяционная теорема для модулярных пространств.— «Матем. сборник», 1965, т. 66, № 4, с. 473—482.
128. **Моро Дж. (Moreau J.).** Convexity and duality.— In: Functional Analysis and Optimization. New York, Academic Press, 1966, p. 145—169.
129. **Немес А. (Nemeth A.).** Korovkin's theorem for non-linear 3-parameter families.—"Mathematica (R. S. R.)", 1969, v. 11, № 1, p. 135—136.
130. **Никишин Е. М.** Резонансные теоремы и надлинейные операторы.— «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 6, с. 129—191.
131. **Пискнер А. Г.** Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства.— В кн.: Некоторые классы полуупорядоченных пространств. Л., Изд-во ЛГУ, 1966, с. 13—18.
132. **Рабинович М. Г.** *К*-линеалы выпуклых множеств.— В кн.: Вопросы повышения эффективности производства. Л., 1965, с. 252—265.
133. **Рабинович М. Г.** Об одном классе частично упорядоченных полугрупп.— «Тр. ЛИЭИ», 1966, вып. 63, с. 31—40.
134. **Рабинович М. Г.** Некоторые классы пространств выпуклых множеств и их расширения.— «Сиб. матем. ж.», 1967, т. 8, №6, с. 1405—1415.
135. **Радстрем Г. (Radström H.).** An embedding theorem for spaces of convex sets.—"Proc. Amer. Math. Soc.", 1952, v. 3, № 1, p. 165—169.

136. **Рей Д. (Ray D.).** Resolvents, transition functions and strongly markovian processes.— "Ann. Math.", 1959, v. 70, № 1, p. 43—72.
137. **Решетняк Ю. Г.** О длине и повороте кривой и о площади поверхности. Автореф. канд. дисс. Л., 1954.
138. **Рокфеллер Р. (Rockafellar R.).** Duality theorem for convex functions.—"Bull. Amer. Math. Soc.", 1964, v. 70, № 1, p. 189—191.
139. **Рокфеллер Р. (Rockafellar R.).** Helly's theorem and minima of convex functions.—"Duke Math. J.", 1965, v. 32, № 2, p. 381—398.
140. **Рокфеллер Р. (Rockafellar R.).** An extension of Fenchel duality theorem for convex functions.—"Duke Math. J.", 1966, v. 33, № 1, p. 81—89.
141. **Рокфеллер Р.** Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973, 469 с.
142. **Ронкин Л. И.** Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971, 430 с.
143. **Рубинов А. М.** Точечно-множественные отображения, определенные на конусе.— «Оптим. планир.», 1969, вып. 14, с. 96—113.
144. **Рубинов А. М.** Сублинейные функционалы, определенные на конусе.— «Сиб. матем. ж.», 1970, т. 11, № 2, с. 429—441.
145. **Рубинов А. М.** Об одной теореме В. С. Климова, М. А. Красносельского и Е. А. Лифшица.— «Оптимизация», 1971, вып. 3(20), с. 154—158.
146. **Рубинштейн Г. Ш.** Конечномерные модели оптимизации. Новосибирск, 1970, 228 с.
147. **Рубинштейн Г. Ш.** Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа.— «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, с. 171—201.
148. **Рублев В. С.** О некоторых классах пространств нормированного пространства. Автореф. канд. дисс. Воронеж, 1969.
149. **Рутковский Н. В.** О супремальном ранге K-пространств.— «Оптимизация», 1971, вып. 3(20), с. 159—163.
150. **Сендов Б.** Въерху сходимости на редице от линейни положительни операторы.— «Годишник Софийск. ун-та, мат. фак. 1965-1966», 1967, т. 60, с. 279—296.
151. **Сендов Б., Попов В.** Сходимости на производните на линейни положительни оператори.— «Изв. Мат. ин-та Бълг. АН», 1970, т. 11, с. 107—115.
152. **Сикорский Р.** Булевы алгебры. М., «Мир», 1969, 375 с.
153. **Скорняков Л. А.** Элементы теории структур. М., «Наука», 1970, 147 с.
154. **Стоер Дж., Витзгол К. (Stoer J., Witzgall C.).** Convexity and optimization in finite dimensions. V. I. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1970.
155. **Урысон П. С.** Зависимость между шириной и объемом выпуклых тел.— «Матем. сб.», 1924, т. 31, с. 477—485.
156. **Фань К. (Fan K.).** On the Krein — Milman theorem.— In: Convexity. Proceedings of Simposia in Pure Mathematics. Princeton, 1963, p. 211—219.

157. **Фань К., Гликсберг И.** (**Fan K., Clicksberg I.**). Some geometric properties of the spheres in a normed linear space.—"Duke Math. J.", 1958, v. 25, № 4, p. 553—568.

158. **Фелпс Р.** (**Phelps R.**). Uniqueness of Hahn — Banach extensions and unique best approximations.— "Trans. Amer. Math. Soc.", 1960, v. 95, № 2, p. 238—255.

159. **Фелпс Р.** Лекции о теоремах Шоке. М., «Мир», 1968, 112 с.

160. **Фенхель В.** (**Fenchel W.**). On conjugate convex functions.— "Canad. J. Math.", 1949, v. 1, № 1, p. 73—77.

161. **Фенхель В.** (**Fenchel W.**). Convex cones, sets and functions. Princeton, 1953.

162. **Франчетти К** (**Franchetti C.**). Convergenza di operatori in sottospazi dello spazio $C(Q)$.— "Bull. Unione Math. Ital.", 1970, № 3—4, p. 668—676.

163. **Фукс Л.** Частично упорядоченные алгебраические системы. М., «Мир», 1965, 342 с.

164. **Хадвигер Г.** Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966, 416 с.

165. **Хан Б.** (**Khan B.**). Sur la Ф-convexite de Ky Fan.—"J. Math. Anal. Appl.", 1967, v. 200, № 1, p. 189—193.

166. **Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.** Неравенства. М., ГИТТЛ, 1948, 456 с.

167. **Хермандер Л.** (**Hormander L.**). Sur la fonktion d'appui des ensembles convexes dans une espace lokalement convexe.— "Arkiv for Math.", 1955, v. 3, № 2, p. 180—186.

168. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962, 829 с.

169. **Шашкин Ю. А.** Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций.— «Изв. АН СССР. Серия матем.», 1962, т. 26, № 4, с. 495—512.

170. **Шашкин Ю. А.** Топологические свойства множеств, связанные с теорией приближения функций.— «Изв. АН СССР. Серия матем.», 1965, т. 29, № 5, с. 1085—1094.

171. **Шашкин Ю. А.** Конечно-определенные операторы в пространствах непрерывных функций.— «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, № 6, с. 175—180.

172. **Шашкин Ю. А.** Граница Мильмана — Шоке и теория приближений.— «Функц. анализ и его приложения», 1967, т. 1, № 2, с. 95—96.

173. **Шашкин Ю. А.** О сходимости нерастягивающихся операторов "Mathematica (R. S. R.)", 1969, v. 11, № 2, p. 355—360.

174. **Шефер Х.** Топологические векторные пространства. М., «Мир». 1971, 359 с.

175. **Шмульян В. Л.** О свойствах единичной сферы пространства типа (В).— «Матем. сб.», 1939, т. 6, № 1, с. 77—94.

176. **Шмульян В. Л.** О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха.— «Докл. АН СССР», 1940, т. 27, № 7, с. 643—648.

177. **Шоке Г.** (**Choquet G.**). Les convexes faiblement complets dans l'analyse.— In: Proceedings of International Congress of Mathematics. Stockholm, 1962, p. 317—330.

178. **Шоке Г., Мейе П. (Choquet G. Meyer P.).** Existence et unicite des representations integrales dan les convexes quelcongue.— "Ann. Inst. Fourier", 1963, v. 13, № 1, p. 139—154.

179. **Шолохович В. Ф.** Об устойчивости экстремальных задач в пространстве Банаха.— «Матем. сб.», 1971, т. 85, № 3, с. 420—430.

180. **Штольц О. (Stolz O.).** Grundzuge der differential und integralrechnung. V. I. Leipzig, Teubner, 1898.

181. **Штрассен В. (Strassen V.).** The existence of probability measures with given marginals.—"Ann. Math. Statistics", 1965, v. 36, № 2, p. 423—440.

182. **Эгглстон Г. (Egglston H.).** Convexity. Cambrige, Cambrige Univ. Press, 1958, 136 p.

183. **Эдвардс Д. (Edwards D.).** Minimum-stable wedges of semicontinuous functions.—"Math. Scand.", 1966, v. 19, № 1, p. 15—26.

184. **Эдварс Р.** Функциональный анализ. Теория и приложения. М., «Мир», 1969, 1071 с.

185. **Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х.** Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., ИЛ, 1962, 334 с.

186. **Эффрос Э. (Effros E.).** Structure in simplexes.— "Acta Math.", 1967, v. 117, p. 103—121.

187. **Эффрос Э., Каждан Дж. (Effros E., Kazdan J.).** Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems.— "J. Diff. Equat", 1970, v. 8, № 1, p. 95—134.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Семен Самсонович Кутателадзе
Александр Моисеевич Рубинов

ДВОЙСТВЕННОСТЬ МИНКОВСКОГО И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ответственный редактор
Владимир Александрович Булавский

Редактор *Л. И. Шпаковская*
Художественный редактор *М. Ф. Глазырина*
Художник *А. И. Смирнов*
Технический редактор *А. В. Семкова*
Корректоры *Н. В. Клопотная, Н. Г. Примогенова*

Сдано в набор 28 января 1974 г. Подписано в печать 13 января 1976 г. МН 02007. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 2. 8 печ. л., 13,4 усл.-печ. л., 13,6 уч.-изд. л. Тираж 2750 экз. Заказ № 26. Цена 1 р. 11 к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

В СИБИРСКОМ ОТДЕЛЕНИИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»

готовятся к выпуску следующие книги:

Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.

Метод Монте-Карло в атмосферной оптике.

Сидорова Г. А., Недоспасов И. В., Бобко И. М. Автоматизированный расчет заработной платы.

Иловайский И. В., Сидристый Б. А. Основы теории проектирования цифровых машин и систем.

Емельянов И. П. Формы колебаний в биоритмологии.

Книги высылаются наложенным платежом. Заказы направлять по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Морской проспект, 22. Магазин «Наука».

Замеченные опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
10	4 сверху	инфимум $\bigvee_{\alpha} f_\alpha$	инфимум $\bigwedge_{\alpha} f_\alpha$
159	6 снизу	$=(\mu_n, p(-\mu_n)),$	$=(\mu_n, \ddot{p}(-\mu_n)),$
200	1 снизу	$+\alpha g\mathfrak{B}\in_n (0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0)\}.$	$+\alpha g\in\mathfrak{B}_n (0\leqslant\alpha\leqslant\alpha\ )\}.$
201	2 сверху	$V_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})=V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})\};$	$V_1(\mathfrak{x}, \overline{\mathfrak{x}})=V_1(\mathfrak{y}, \overline{\mathfrak{x}})\};$
201	5 сверху	$V_1(\mathfrak{x}, \overline{\mathfrak{x}})=V_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}).$	$V_1(\mathfrak{x}, \overline{\mathfrak{x}})=V_1(\mathfrak{y}, \overline{\mathfrak{x}}).$
201	9 сверху	$=nV_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})+$	$=nV_1(\mathfrak{y}, \overline{\mathfrak{x}})+$

С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов. Двойственность Минковского и ее приложения.